MATERIA E MOTO

PER

G. CLERK MAXWELL

CON PROEMIO E NOTE

DI GIOVANNI CANTONI

MILANO
LIBRERIA FRATELLI DUMOLARD
Corso Vittorio Emanuele.

—

1881.

PROEMIO

1. Tra i molti manualetti, pubblicati in Inghilterra col proposito di divulgare le più importanti dottrine scientifiche, merita di certo una speciale attenzione quello, dato fuori dal Maxwell, col titolo di *Materia e moto*, che qui presentiamo recato in italiano.

Il trattare dei fondamenti meccanici della fisica generale di oggidì, in forma elementare, e con dizione chiara ed esatta, è opera oltremodo difficile. E tanto più ardua essa riesce quando, come qui accade, si voglia giungere, grado a grado, a far ben comprendere i principî e le leggi fondamentali così della cinematica dei punti materiali, come della dinamica dei sistemi di molecole e dei sistemi delle grandi masse cosmiche.

Però, nell'eseguire questa versione ci siamo valsi [1] di una tal quale libertà di frase, affin che fosse reso meglio esplicito per noi il senso del testo inglese.

E con molto piacere ci accingemmo a questo lavoro, in quanto che, oltre alla bontà intrinseca dell'opera originale, per gli Italiani deve riescir gradito il vedere per essa come uno dei più valenti fisici moderni d' Inghilterra, qual fu il Maxwell, del quale la scienza deplora la recente perdita, proponendosi d' esporre in forma elementare le più alte dottrine fisico-meccaniche, coi

(1) La traduzione venne eseguita dal chiaro prof. L. Rota-Rossi, e riveduta dal sottoscritto.

metodi stimati oggi migliori, venne svolgendo, forse a sua insaputa, un fecondo principio, posto in chiaro dal nostro Galilei, per la composizione dei movimenti, e già maestrevolmente applicato alla statica dal nostro Mossotti nelle sue *Lezioni elementari di fisica matematica* del 1841, le quali non incontrarono in ciò, pur tra noi, imitatori, come ben si meritavano. Grazie a questo principio, tutte le quistioni di statica si traducono in questioni di cinematica o di dinamica. Anzi per esso si giunge, per una via facile ed uniforme, a determinare le condizioni di equilibrio e di efficacia di tutte le macchine, semplici e composte, senza bisogno d'immaginare speciali artificî di statica o di calcolo per ogni caso speciale.

2. Nella storia della fisica tutti ricordano con onore la scoperta del Galilei sulle leggi del moto dei gravi. Ma non tutti si curano di mettere in chiaro con qual metodo egli si accingesse a questa fondamentale indagine, e non pochi si limitano ad accennare alcune sue celebrate sperienze.

Se veramente, per la fisica, è di grande momento il saper discernere come ed in quanto la gravità terrestre intervenga a modificare tutti i moti de' corpi, che noi possiamo provocare od osservare qui sulla superficie terrestre: è però cosa di ben maggiore momento il dimostrare, siccome fece il Galilei, che qualsiasi forma di moto naturale può essere, e diremmo quasi deve essere, preveduto dianzi per opera di semplice raziocinio. Perciocchè la meccanica della natura non può essere utilmente e con sicurezza investigata, se prima non siansi razionalmente investigati, nella così detta meccanica astratta, le varie forme di moto, che la mente nostra può concepire e la nostra ragione determinare nelle sue particolari condizioni di produzione e nelle sue leggi speciali di attuazione.

3. Ora appunto il Galilei, nei suoi immortali dialoghi *intorno a due scienze nuove attenenti alla meccanica ed ai moti locali* (1638), cominciò col determinare le condizioni e le leggi di un *moto equabile,* che oggi meno propriamente si dice *uniforme,* e poscia, data la definizione di *moto equabilmente accelerato,* dedusse, per via puramente razionale, tutte le leggi di una tale specie di moto.

E nel far ciò egli si valse anzitutto del suaccennato principio della composizione dei movimenti. Cioè suppose, che se ad un mobile si imprime un moto, determinato in direzione ed in grandezza, questo si verificherà in esso in egual modo e misura,

tanto che il corpo stesso sia dianzi, per supposto, in quiete, oppure già dotato di uno o più altri movimenti quali si sieno. Così, in un moto equabilmente accelerato, la velocità dovrà andar crescendo proporzionatamente al tempo trascorso da che lo si immagina iniziato, e continuato con un grado costante di accelerazione per ogni successivo tempuscolo di uguale durata. Perciocchè ogni accelerazione rappresenta, in questo caso, una novella impulsione data al mobile, la quale deve produrre un costante incremento di velocità, qualunque sia il valore della velocità dal mobile già acquistata al principiare di un individuato tempuscolo.

4. Ed è in base a questo medesimo principio — il quale ci porge una delle più esplicite dichiarazioni del concetto di *inerzia*, le tante volte male interpretato, — che il Galilei passò a determinare le relazioni che dovevano di necessità verificarsi fra gli spazi percorsi dal principiare dell'ideato movimento ed i tempi rispettivamente trascorsi dal principio stesso, per percorrere i medesimi individuati spazî.

In seguito dimostrò che l'accelerazione di un dato mobile, quale verificherebbesi in esso ove fosse perfettamente libero di muoversi nella direzione dell'accelerazione medesima (qual'è pei gravi terrestri la *verticale*), sarà soltanto modificata nella sua grandezza, ma ancora produrrà un moto equabilmente accelerato, ogniqualvolta il mobile sia obbligato a scorrere lunghesso un piano variamente inclinato rispetto all'anzidetta direzione: talchè la velocità acquistata nello scendere da un punto ad un altro, aventi un differente livello, sarà indipendente dalla inclinazione del piano stesso ed anche dalla forma della superficie di discesa, e dipenderà soltanto dalla misura della differenza di livello dei detti due punti.

Or fu dietro questo apparato di dimostrazioni di meccanica astratta, ossia puramente razionale, che il Galilei si accinse a sperimentare quali fossero in realtà le leggi del moto dei gravi scendenti un piano inclinato. E fu soltanto allora che, riconosciuta la corrispondenza tra la previsione teorica ed il risultato sperimentale, acquistò la convinzione, che codesto risultato aveva un valore scientifico, cioè poteva esser tenuto per *vero*.

5. E similmente, nella scoperta dell'altra legge fondamentale del moto verticale dei gravi, che l'accelerazione è indipendente dalla massa e quindi dal peso dei singoli corpi, egli si giovò

del medesimo principio della composizione dei movimenti. Poichè prima dimostrò razionalmente, che la grandezza dello sforzo, esercitato da ciascun grave contro ciò che ad esso impedisce il moto di gravità, deve essere uguale alla somma dei singoli sforzi esercitati da tutte quante le parti minime di materia che costituiscono il grave stesso; e che perciò la accelerazione dovrebbe per ciascuna di queste parti minime riuscire la stessa, tanto che si movessero tutte slegate le une dalle altre, quanto che si movano insieme collegate in un unico mobile.

Ciò che veramente varia dall'uno all'altro di questi casi è la misura della forza motrice impellente, quella che chiamiamo *peso assoluto* del corpo. Epperò essendo questa in ciascun caso proporzionata al numero ed al peso singolo di ciascuna delle dette parti minime, avviene che la velocità, parzialmente acquistata da ognuna di esse in un dato tempo, riesce uguale in ogni caso. In più brevi termini, la grandezza della forza motrice di gravità essendo direttamente proporzionata alla grandezza della massa del corpo, la velocità acquistata risulterà indipendente dalla massa medesima.

E così egli pensò che, ove fosse tolta affatto la resistenza del mezzo fluido, corpi di natura e di peso qualsivogliano dovessero percorrere, in uguali tempi, un'uguale altezza di caduta.

Il che potè poi verificare, in forma molto approssimata, lasciando cadere contemporaneamente dall'alto della torre inclinata di Pisa parecchie sferette di ugual volume, ma di peso ben diverso tra loro.

6. Anzi, giovandosi della suesposta cognizione intorno alla indipendenza della figura della linea di caduta, pensò che, reggendo con fili di uguale lunghezza alcune palline di diversa densità, e deviandole poi dalla posizione di equilibrio per archi uguali, ed abbandonandole a loro all'azione di gravità contemporaneamente, nel discender prima e nel salir poi per eguali archi dalle due bande della verticale, avrebbero impiegato uguali tempi; sempre quando fosse tolta l'azione del mezzo resistente, appunto perchè la velocità massima da ciascuna di esse presentata nell'atto del passaggio per la verticale esser dovea per tutte uguale.

E così infatti il Galilei verificò coll'esperienza. Anzi da questa egli cavò partito per confermare il risultato dell'esperienza precedente, quella della caduta libera per notevole altezza. Giacchè, egli diceva, qui abbiam modo di veder ripetere un nu-

mero grandissimo di volte una caduta per sè molto piccola; tanto che, qualora l'accelerazione variasse anche di poco da una ad altra pallina secondo il proprio peso, si renderebbe ben tosto manifesta la differenza medesima colla ineguaglianza nel numero delle oscillazioni fatte dalle singole palline in un tempo assegnato.

Abbiamo qui citata questa particolare considerazione del Galilei, poichè essa è una chiara previsione di quelle altre esperienze che il Newton eseguì molto di poi, e che comunemente sono ricordate quale una invenzione del sommo fisico inglese, siccome fa anche il Maxwell nel manuale in discorso.

7. Ed anche le condizioni di equilibrio delle varie macchine semplici furono studiate dal Galilei per via razionale, mercè la considerazione dei *momenti* delle forze, applicate a punti diversi, e tendenti a produrre in essi uno spostamento rispetto ad un dato punto, supposto fisso nel sistema dei punti medesimi. E così venne a chiarire il vero ufficio delle macchine, quello cioè di stabilire tale una relazione fra le velocità e gli sforzi applicati ai singoli punti di esse, che ci dispensa dal dividere in parti una resistenza superiore ad un dato sforzo; sempre che però quanto si guadagna di forza, com'egli dice, tanto perdesi di velocità, e quindi di tempo [1].

Anzi in questa discussione il fisico pisano si spinse a tanto da vedere, coll'acuta sua mente, un principio generale, quello che fu poi detto delle *velocità virtuali*, e che in seguito acquistò tanta importanza nella meccanica generale.

8. Si sono qui ricordati con qualche estensione questi studî del Galilei, non tanto perchè incompiutamente menzionati nei comuni trattati di fisica, quanto piuttosto per mettere in evidenza, con una felice applicazione, quali esser debbano le arti del così detto *metodo sperimentale*. Perciocchè qui noi tocchiamo insieme una delle più importanti quistioni di filosofia teoretica.

Quando il Vinci ed il Galilei additavano la sperienza come sicura interprete della natura, e raccomandavano di far più attento e più lungo studio nel gran libro della natura, anzichè nei libri dei dotti, essi attribuivano un significato più largo e, quasi direi, più dottrinale al vocabolo *esperienza*, per rispetto al senso datogli da taluni moderni. Ed i libri dei dotti da essi

---

(1) Veggasi l'importante suo opuscolo: *Della scienza meccanica, e delle utilità che si traggono dagli istrumenti di quella.*

giustamente poco raccomandati erano gli indigesti commenti fatti dagli scolastici ai libri di fisica e di storia naturale di Aristotele.

Ed in ciò quei due robusti ingegni italiani s'accordavano, almeno nel loro obbjettivo più elevato, colle aspirazioni di quel non meno forte ingegno francese, che fu il Descartes, il quale pure si immaginava di dover prima cancellare dalla propria memoria tutto quanto aveva appreso per le altrui riflessioni, per poi costruire *ex novo*, e per sola virtù della propria mente, i principî, ossiano le basi delle dottrine scientifiche.

Per il Galilei come pel Vinci le *sensate esperienze* offrono bensì un indirizzo ed un campo meglio determinato alle speculazioni scientifiche. Ma la scienza si costituisce sol quando si può riconoscere un pieno consenso fra le previsioni razionali e le risultanze della osservazione o dell'esperienza.

Il che segnatamente vale per quanto riguarda i fatti di un'indole più generale, quali sono appunto quelli studiati nella fisica generale e nella meccanica. Ed in vero, quando il metodo induttivo vuol ascendere dai particolari ai fatti di osservazione o di esperienza, a formulare un concetto generale su di essi, non può a meno di ricorrere ad una ipotesi, cioè di immaginare alcune condizioni ed alcune leggi generali concernenti il prodursi di quei fatti singolari, all'uopo di verificar poi se queste presupposizioni valgano a rispondere *misuratamente* al modo ed alla grandezza particolare di ciascun singolo fatto.

Ed ecco come il Galilei nostro, non solo concepisse chiaramente, ma sempre applicasse in tutte le sue indagini quella massima metodica, che un moderno filosofo francese, l'Augusto Comte, giustamente proclamava siccome fondamentale, questa cioè: che la scienza procede per ipotesi, ma che non hanno valore alcuno quelle ipotesi, le quali non siano suscettive di verificazione. Poichè un'ipotesi acquista valore scientifico soltanto dopo che potè essere verificata, cioè riscontrata con esatta misura ne' particolari fenomeni che l'ipotesi stessa si propone di spiegare. Anzi, a mio credere, il Galilei nelle summenzionate sue indagini ebbe un concetto ancor più chiaro del triplice procedimento del metodo inventivo; quello cioè della cernita o dell'analisi dei fatti singoli; quello della preconcezione delle loro leggi, e quello della verificazione di coteste leggi nei fatti medesimi. Per tal modo, ma soltanto per tal modo, l'esperienza diventa sicura maestra dei *veri* di natura.

Questi ammaestramenti però, convien ripeterlo, trovano più sicura applicazione negli studî della fisica generale. Mentre che, nella investigazione dei fatti d'ordine complesso, quali sono ad esempio quelli offertici dai corpi organizzati, che formano l'oggetto della così detta *biologia*, i processi metodici si rendono meno determinati e più involuti, tanto che la scoperta del vero risulta oltremodo difficile. Ed è perciò che i trovati delle scienze fisiologiche ci offrono un carattere di transitorietà e di successiva modificabilità, per cui ben può dirsi, che in quel ramo ogni asserto dottrinale, ossia ogni vero scientifico è puramente provvisorio, cioè prepara la via a dei veri più comprensivi e più saldi. Ed è perciò ancora che in codeste scienze l'esperienza diligente ed oculata riesce tuttora più utile di ogni ipotesi o prenozione razionale: giacchè qui versiamo ancora nel primo dei tre periodi suaccennati del metodo inventivo.

Ma, d'altra parte, vuolsi considerare che sarebbe pur erroneo il credere che, se per l'or accennato campo di studî l'osservazione e l'esperienza prevalgono ancora sulle concezioni dottrinali, così per l'altre scienze fisico-meccaniche fossero da tenere per meno feconde e meno necessarie le intuizioni della ragione speculativa.

In quest'altro ordine di investigazioni, d'indole più generale, può tenersi per buona anche la massima del nostro Vico che « il vero è il fatto, e che la prova del vero sta nel farlo. » Così appunto procedette il Galilei, il quale, intuendo il vero nel fatto, potè provare il vero stesso col fatto.

9. Queste considerazioni ci riconducono al nostro primo proposito, quello cioè di porgere al lettore un'idea succinta degli intendimenti svolti dal Maxwell nel suo libriccino « *Materia e moto*, » che ameremmo veder divulgato anche tra noi.

10. La fisica investiga l'ordine nella natura, ossia le leggi della successione dei fatti naturali. Il più semplice fatto è quello del moto di un corpo rispetto ad un altro, qual è, ad esempio, il moto della luna rispetto alla terra.

Molti fenomeni si risolvono in cangiamenti di posizione di più corpi gli uni rispetto agli altri, oppure di talune parti di un corpo rispetto ad altro.

Più corpi, mercè alcune loro reciproche influenze od azioni esterne, possono costituire fra loro un *sistema*, come le varie particelle di un dato corpo, mercè alcune loro mutue azioni interne, costituiscono pure un sistema, d'un ordine minore.

Si acquista una completa cognizione d'un fenomeno quando si giunge a descrivere completamente i cambiamenti occorsi nella disposizione relativa delle parti costituenti il sistema.

I moti relativi delle varie parti d'un sistema sono determinati col mezzo dei *diagrammi*, cioè per mezzo di un sistema di rette rappresentatrici delle direzioni e velocità corrispondenti ai singoli moti di ciascuna parte rispetto ad un medesimo punto, preso ad origine comune di tali rette, che sono chiamate *vettori*.

Analogamente si possono rappresentare due o più sistemi, e riferirli ad un altro sistema, considerandoli, tutt'insieme, come parti d'un unico sistema, di natura più generale.

I *diagrammi di spostamento* indicano non solo la mutazione nelle posizioni relative di uno o più punti rispetto ad un altro dato punto, e la grandezza relativa delle velocità di traslazione de' singoli punti, ma indicano ancora se queste velocità si mantengano costanti, oppure siano variabili secondo una data relazione col tempo, chiamata accelerazione o ritardazione.

Tutte queste particolarità si possono anche riscontrare insieme nel moto di un dato punto, componendosi in esso, cioè verificandosi in esso contemporaneamente parecchi moti, taluni con velocità costanti, altri con velocità variabili, pur con diversa legge. Ma in tal caso quel punto si muove, di fatto, con una data direzione e con una data velocità, come che si compiesse in esso un unico moto, chiamato *composto*, il cui risultato però torna lo stesso, per un dato tempo, di quello che sarebbesi verificato qualora ognuno di tali moti si fosse verificato, nella propria direzione e colla propria velocità, per un egual tempo, ma separatamente ed in modo successivo, l'uno dopo l'altro di per sè. Ed ecco ancora dominante il principio di Galilei della *indipendente coesistenza di più moti in un dato mobile.*

Ora in tutte queste considerazioni noi limitiamo l'attenzione nostra ai moti, guardati sotto un aspetto puramente geometrico, come si procede nella *cinematica*, senza por mente nè alla massa particolare dei mobili, nè alle condizioni od azioni fisiche che provocano e mantengono i moti ne' mobili stessi. E quindi codesti dati cinematici sono d'un'indole generale, o speculativa, indipendente cioè dalle speciali nature di quelle influenze od azioni reciproche, che in realtà si esercitano fra i corpi, in relazione alle rispettive loro masse, alla peculiare

loro struttura ed alla natura particolare della sostanza costituente le loro parti minime.

11. Allorquando, invece, si considerano anche codeste reciproche influenze esercitantisi tra le parti singole dei corpi (come sono le influenze bariche o gravifiche, le termiche, le magnetiche, le elettriche, ecc.), azioni mutue, che, con una frase non abbastanza ben definita, si denominarono *forze fisiche,* guardandole siccome altrettante cause di moto; allora dalla *cinematica* si passa alla *dinamica,* cioè alla considerazione delle forze così *esterne* come *interne* dei corpi, promovitrici tanto de' movimenti totali dei corpi stessi, quanto degli svariati moti parziali delle loro molecole, e delle modificazioni che intervengono nella forma o disposizione delle rispettive loro parti. In allora il vocabolo che meglio serve ad esprimere il concetto più generico che possiam formarci d'un corpo qualsiasi è appunto quello di *sistema*, con che s'intende che esso è costituito da più parti, le quali, per reciproche loro influenze od azioni, si tengono così legate tra loro, che l'una di esse non può esser modificata nella sua postura relativa, o, nella sua velocità, senza che tutte l'altre parti non risentano una modificazione analoga e commisurata a quella.

Però in natura non si dà una modificazione qualsiasi in un dato corpo, senza che contemporaneamente non si produca una modificazione dello stesso ordine e dello stesso valore, ma di opposto verso in altro corpo. Cioè appunto ogni modificazione, ogni fenomeno fisico, è il risultato di un atto duplice, che nel linguaggio comune sogliamo distinguere coi nomi di *azione* e *reazione,* ma che in realtà è il portato di una scambievole azione di due corpi, i quali esercitano tra loro, e contemporaneamente, un'influenza d'un dato ordine.

Or questa scambievole azione in oggi, assai opportunamente, la si indica con un solo vocabolo: quello di *sforzo.* Con ciò si evita quell'erroneo concetto, per cui si pensa che l'azione sia un atto esercitato da una forza esterna ad un corpo, e che la reazione sia un atto dovuto all'interna forza del corpo stesso modificato.

Laddove tanto l'azione, esercitata dal corpo modificante sul modificato, quanto la reazione, spiegata dal corpo modificato sul modificante stesso, rispondono a due azioni, che sono in pari tempo interne ed esterne per tutti e due questi corpi. Cioè la modificazione è reciproca, e tanto è attivo il modificato sul

modificatore, quanto questo lo è su quello; tutti e due essendo suscettivi di operare insieme come attivi e come passivi.

12. Queste nozioni si fanno evidenti tanto nell'esercizio dei fatti di gravitazione astronomica, quanto in quelli di gravità terrestre, quanto ancora nei fatti più ovvî dell'urto fra corpi elastici.

La gravitazione del nostro pianeta è l'espressione di un reciproco sforzo di avvicinamento tra la massa del sole e quella della terra: come la gravità terrestre è l'espressione d'un reciproco sforzo di avvicinamento tra la massa della terra e quella di un dato grave. Tutti e due i detti corpi, in ciascun caso, si modificano nella loro posizione, in ragione inversa delle loro masse relative. Ma, poichè la massa del sole comprende un numero grandissimo di volte quello della terra, lo spostamento del centro di massa del sole riesce proporzionatamente piccolo, rispetto a quello del centro della massa terrestre. E similmente accade per lo spostamento del centro di massa della terra, rispetto a quello del centro di massa del grave considerato.

Invece, nel caso dell'urto fra corpi elastici, potendosi da noi rendere poco differenti tra loro ed anche eguali le masse dei due corpi che entrano in conflitto, possiamo facilmente rendere manifesto che il fenomeno consiste in una doppia ed equivalente modificazione, in essi prodottasi per un mutuo loro sforzo di reciproca compressione, cui consegue una pur reciproca espansione per reazione elastica. Nel che poi riscontrasi un altro principio fondamentale della meccanica, quello cioè della conservazione delle energie: in quanto che, dopo l'urto, la somma delle energie cinetiche (forze vive) eguaglia quella che ne' due corpi sussisteva innanzi l'urto.

13. E qui giova notare come il vocabolo *energia* abbia un significato meglio esplicito e determinato di quello di *forza*. Chiamasi *energia* d'un corpo la sua efficacia, cioè la misura e grandezza relativa della sua attitudine a compiere un determinato lavoro. E si denomina *lavoro* l'atto con cui un corpo produce un cambiamento di posizione in un sistema di parti, le quali, attese le loro scambievoli azioni od influenze, resistono a codesto cambiamento.

Ora, nel caso suaccennato dell'urto fra corpi elastici, la energia di movimento o cinetica del mobile urtante produce un lavoro nell'urtato contro le di lui forze molecolari; cioè

contro la intima energia delle sue molecole, le quali sono in atto di moto vibratorio, in corrispondenza alla temperatura del corpo stesso. E la perturbazione prodotta nelle molecole medesime, in correlazione al loro avvicinamento (moto di condensazione molecolare) produrrà, alla sua volta, una perturbazione dello stesso ordine e della stessa complessiva grandezza nel corpo urtato, sia poi questo in moto od in quiete.

Oltre di che, all'insieme di queste due perturbazioni nel senso di reciproco avvicinamento tra le molecole, conseguirà, appunto pel principio della conservazione delle precedenti energie molecolari, un novello lavoro; giacchè le molecole medesime, in entrambi i corpi, tenderanno a riprendere le maggiori distanze mutue, nelle quali prima si trovavano. In più brevi parole, al lavoro di condensazione, compiuto in opera di una energia esterna, succede il lavoro di espansione in opera delle interne energie dei due corpi urtantisi: epperò l'un lavoro dovrà in grandezza essere eguale all'altro, ma di verso opposto.

14. Ed ecco che pure in questo caso, il quale servir può di tipo per moltissimi altri fenomeni fisici, facilmente riconosciamo, in primo luogo, che quanto in passato chiamavasi forza motrice esterna e forza elastica interna corrispondono a due forme apparentemente differenti di energia: la energia cinetica di traslazione della massa totale del corpo urtante, e la energia molecolare o termica dei due corpi urtantisi. Ed, in secondo luogo, si comprende come questa ultima forma di energia si risolva anch'essa in una energia cinetica, non più della massa totale di ciascun corpo, ma bensì della massa particolare delle singole sue molecole.

Tanto che al concetto sempre vago e nebuloso di *forza*, vien sostituendosi quello dell'impeto di una massa, grande o piccola che sia, ma dotata d'una velocità, di grandezza e di direzione assegnate.

E le modificazioni nella direzione e nella grandezza dei movimenti parziali di un sistema corrispondono sempre a talune momentanee o durevoli mutazioni di posizione rispettiva delle parti del sistema medesimo.

Tale è appunto la tendenza di tutte le moderne dottrine fisiche, quella di voler ridurre la dichiarazione dei diversi ordini di fenomeni fisici a semplici questioni di dinamica, assumendo qual

tipo il fenomeno dello scambio di moto fra i corpi elastici, in atto di vibrazione o di traslazione.

15. E qui ancora non posso omettere di ricordare un altro felicissimo intuito del sommo pisano, col quale egli preludeva alla più grande delle scoperte, fisiche e filosofiche insieme, dei tempi nostri, quella della così detta unità delle forze fisiche, od a meglio dire della omogeneità ed equipollenza di tutti gli ordini di fenomeni fisici, che con isvariate serie vanno riproducendosi gli uni dagli altri.

Disse il Galilei, nel suo *Saggiatore*, che il calore, i suoni, i colori, gli odori, ecc., non tanto si differenziano in sè medesimi, quanto piuttosto nei diversi organi de' sensi, a mezzo de' quali noi percepiamo que' diversi fenomeni esterni; i quali, a suo credere, dovevano risolversi in grandezze, figure e movimenti, di varia forma e di varia misura.

Talchè l'inglese Grove, nel 1842, si fece degnissimo interprete di questa sentenza galileana, quando nel suo celebrato discorso *sulle correlazioni delle forze fisiche* venne dimostrando, con appropriati esperimenti, che i varî ordini di fenomeni fisici (dinamici, termici, luminosi, chimici, elettrici, magnetici) sono convertibili a perfetta vicenda gli uni negli altri: tanto che, partendo da uno qualsiasi di essi come atto primo, ci è dato di riprodurre in serie tutti quanti gli altri atti o le altre forme di fenomeni, che da noi sono percepiti con sensi diversi, od osservati con diversi artifizî o stromenti.

Il quale concetto fondamentale venne poi completato dall' altra scoperta di Mayer e di Joule della equivalenza tra le energie promovitrici e le energie promosse, attraverso a qualsiasi serie di trasformazioni. Il che opportunamente si riassume, come nota il Maxwell, col dire che i corpi costituenti la natura formano un *sistema conservativo*, per riguardo alla equivalenza fra il lavoro fatto da azioni esterne al sistema ed il lavoro compiuto dal sistema stesso, nel reagire a queste esterne influenze.

Pertanto — siccome prevedeva il Galilei, guidato dal suo principio della indipendente coesistenza di più movimenti in un medesimo mobile, — in tutta codesta svariatissima successione di fenomeni, che natura vien dispiegando ai sensi nostri, di veramente obbiettivo nulla più si produce e si conserva, che movimenti svariati in mobili di massa pure svariata.

16. Anzi, sotto questo punto di veduta, potremmo asserire

che il Galilei vide con occhio più sicuro ciò su di che il Maxwell si mostrò ancora peritoso, voglio dire nel ritenere che pur tutte le energie, dette in oggi *di posizione*, devono risolversi in energie *cinetiche*.

Così mano mano vediamo surrogarsi ai vaghi concetti di pressioni e di tensioni, considerate nei fluidi liquidi e nei fluidi aeriformi, i più espliciti concetti di energie cinetiche molecolari, dovute a gravità od al calore, nelle singole molecole dei fluidi stessi. Così ancora vedemmo l'energia termica interna dei corpi risolversi in energia cinetica dei loro gruppi molecolari, o delle loro molecole.

E del pari le energie chimiche si vengono rischiarando col concetto delle energie cinetiche proprie degli atomi materiali, che concorrono a costituire quel piccolo sistema, che sogliamo chiamare molecola fisica.

17. Anzi, io credo che la scienza non sia ancora pervenuta all'ultima risoluzione del grande sistema cosmico man mano in sistemi subordinati, cioè prima in sistemi di nebule, poi in sistemi di stelle, in sistemi planetari, in sistemi di satelliti, in sistemi di particelle, in sistemi di molecole, in sistemi di atomi. Perocchè io penso, che ancora l'atomo del chimico moderno sia, alla sua volta, un sistema di punti materiali, dotati di loro particolari energie cinetiche, e che forse ancora questi ultimi elementi della materia ponderabile, che denomineremo *punti fisici*, debbano risolversi in un sistema di *punti imponderabili*, cioè in punti eterei.

18. Tengo anzi un'altra opinione, che mira a render sempre più complesso il concetto che dobbiam formarci della materia dei corpi. Voglio dire, siccome già consideriamo ogni corpo quale un sistema di particelle gravi; così dobbiamo pure riguardare ogni corpo quale un particolare sistema di *elementi elettrici* e di *elementi magnetici*. Perciocchè tutti i corpi ponno considerarsi fonti di reciproche influenze elettriche e magnetiche, ossia come fonti di energie elettriche e di energie magnetiche. Laonde codesti corpi dovranno costituire, nel loro insieme, un *sistema conservativo*, anche per rispetto a questi altri due ordini di energie. E siccome la inseparabile bipolarità è qualità caratteristica tanto de' fenomeni magnetici come degli elettrici; così gli ideati elementi magnetici ed elettrici dovranno essere di necessità bipolari. Cioè le molecole fisiche dovranno essere costituite da codesti elementi bipolari, i quali a loro volta, assai

probabilmente, devono questa bipolarità ad un moto di rotazione delle loro parti attorno ad un asse comune di movimento.

19. Ma qui però giova avvertire, come egregiamente dichiara il nostro Maxwell, che nel conflitto de' sistemi si deve badare non solo a quelle energie che si riferiscono al centro di massa d'ogni sistema, ma ben ancora alle energie parziali riferite al centro di massa d'ogni secondario sistema, che entri a costituire il sistema principale; e così via via pei sistemi più subordinati, che entrano a comporre il sistema d'ordine mano mano minore. Epperò, nel calcolare le energie e quindi i lavori ottenibili da un dato sistema, devesi badare sino a qual ordine di moti suborbinati si debba tener conto, per rispetto al modo di usufruizione della energia d'un sistema in un dato caso.

Così, ad esempio, quando noi calcoliamo la energia cinetica acquistata da un grave terrestre, percorrendo in libera caduta una data altezza, in un individuato luogo, noi teniamo conto soltanto della sua massa totale e del quadrato della velocità, che esso avrà acquistata, secondo le leggi galileane, in proporzione della altezza di caduta e della accelerazione di gravità nel luogo medesimo.

E appunto così dobbiam fare, perchè qui ci riferiamo soltanto allo spostamento intervenuto fra il centro di massa del grave e il centro di massa della terra, colla quale il grave stesso forma un sistema.

Se invece consideriamo l'energia di quel grave, correlativa alla sua posizione nel sistema, inquantochè questo è dotato di un moto di rotazione, dovremmo tener conto dello spostamento del centro di massa del grave medesimo per l'arco di parallelo, che esso vien descrivendo nella unità di tempo, in correlazione alla latitudine del luogo ed alla velocità angolare del moto rotatorio terrestre.

Anzi lo stesso grave possiede una ben altra energia cinetica, insieme colla terra tutta, perciocchè questo, facendo parte del sistema solare, vien continuamente trasferendosi, col proprio centro di massa, nell'orbita elittica, che il centro stesso descrive attorno al centro di massa del sole.

Ma queste energie cinetiche del grave sopra considerato, quelle cioè dovute al moto diurno di rotazione ed al moto annuo di traslazione della terra, non influiscono punto, nè devono essere prese in calcolo, finchè si tratti di considerare o

di sfruttare, trasformandola in lavoro, la energia di caduta, ossia l'impeto di percossa che quel grave può fare contro l'ostacolo che ne arresta il moto.

Laddove queste due energie dovrebbersi tenere in conto, quando si considerasse l'impeto di tal corpo cadente contro altro corpo, che non facesse parte del sistema terrestre; ossia che, provenendo dal di fuori di questo sistema, dotato d'un proprio moto, estraneo a quello della terra, venisse ad incontrare ed urtare il grave anzidetto.

Tale è il caso, a modo di esempio, degli aeroliti e degli asteroidi minutissimi, che tratto tratto entrano nella atmosfera terrestre, dotati di lor proprî moti traslatori, e quindi di lor proprie energie cinetiche.

Perocchè le molecole d'aria, le quali in un col centro di massa terrestre conservano il loro moto rotatorio e traslatorio, incontrandosi poi con siffatti corpi stranieri, dovranno scambiare con questi le loro rispettive energie cinetiche, ed il risultato del conflitto sarà correlativo alla differenza nella direzione e nella velocità dei rispettivi loro movimenti. E da questo conflitto, e commisuratamente ad esso, sorge quella quantità di calore, che risponde alla diminuita energia cinetica nel sistema.

20. Un analogo avvedimento è necessario nella valutazione dei fenomeni che si compiono nei gruppi e sottogruppi molecolari dei corpi. L'impeto di caduta, o la forza di percossa pel grave anzidetto in tal luogo, non subirà modificazione alcuna pel vario stato termico di esso, cioè pel grado di temperatura che esso potrebbe avere in diversi casi, purchè sieno costanti la sua massa e l'altezza di caduta. Eppure, col mutare della temperatura, muta l'energia termica delle sue molecole, ossia la velocità di queste; ma, per rispetto al divisato moto di caduta verticale, questi intestini moti molecolari di varia intensità non alterano il moto di gravità del loro comun centro di massa. Soltanto potranno que' moti molecolari intervenire a mutare la temperatura del corpo urtato, indipendentemente dall'energia cinetica di gravità da questo trasmessa per l'impeto suddetto.

Ed anco nell'urto fra due corpi elastici, l'impeto di ciascun d'essi su l'altro è commisurato soltanto alla loro massa, ed al quadrato della velocità dei loro centri di massa, qualunque poi sieno le velocità termiche delle singole loro molecole. Poi-

chè questi moti intestini non intervengono a modificare l'energia cinetica dei corpi stessi, e possono soltanto modificare il tempo necessario a compiere i due atti dell'urto, quelli di condensazione e d'espansione, fra le singole loro molecole.

Analogamente, quando mescoliamo tra loro due liquidi, di differente natura, ed aventi diversa temperatura, in molti casi, accade che la temperatura finale della miscela ha soltanto relazione colle masse e colle differenze di temperatura e di caloricità dei due corpi, senza riguardo alle energie termiche totali delle molecole di questi corpi, correlative alla loro temperatura assoluta. In altri casi però conviene tener conto anche di quest'ultimo elemento (la temperatura assoluta), perchè col variare della medesima, varia quella condizione complessa dei sistemi molecolari, da cui dipendono insieme e la coerenza relativa e la relativa caloricità di questi.

Eppure in entrambi i casi or considerati le singole molecole dei due corpi, considerate, come dicemmo sopra, quali gruppi di punti fisici, posseggono altre energie, più intime a quelle della comune temperatura, cioè non corrispondenti ad un moto di tali punti in comune col rispettivo centro di massa, ma di moti particolari di essi punti rispetto al centro, i quali moti differiscono in grandezza da sostanza a sostanza. Epperò, avendo noi presupposti eterogenei i due liquidi sovra considerati, queste energie intime potranno anche essere di un grado molto diverso nelle molecole dei due corpi, sotto una stessa loro temperatura.

Talchè potrà intervenire che, nell'atto stesso dello scambio di temperatura fra le molecole dei due liquidi, le molecole eterogenee vengano di tanto perturbate nelle loro parti più intime, da dar luogo ad una produzione o ad una sottrazione di calore nella risultante miscela; la quale presenterà, in tal caso, una temperatura finale differente da quella prevista in base alla nota caloricità dei corpi medesimi.

Ora, in questi casi, noi sogliam dire che l'intervenuta produzione o sottrazione di calore ci rivela una modificazione pur intervenuta nello stato fisico o nello stato chimico delle molecole dei corpi posti in conflitto.

Ma, appunto, col dire ciò, noi implicitamente riconosciamo che, oltre l'energia termica propria della così detta molecola fisica e correlativa alla di lei temperatura assoluta, sussiste un'altra forma di energia più intima, quella che è propria sia

dei punti fisici, costituenti la molecola medesima (gli atomi dei chimici), sia dei punti eterei, costituenti ciascun punto fisico. E queste energie più intime delle molecole possono talora essere ragguardevolissime, come ce ne fanno prova le notevoli calorie di combinazione di alcuni composti.

21. Pertanto ci crediamo autorizzati a ripetere (§ 17) che la fisica moderna, molto probabilmente, non ha esaurita la serie delle risoluzioni de' sistemi cosmici nei molteplici sistemi subordinati, che in realtà li costituiscono.

Ciò nondimeno le nostre cognizioni, entro dati limiti, risultano abbastanza fondate, per modo che col calcolo possiam prevedere il risultato di dati conflitti di corpi, in quanto le manifestazioni da noi considerate in questi conflitti dipendono da perturbazioni spinte sino a quell'ordine de' sistemi subordinati, la cui parziale energia (riferita al centro del sistema), venne già determinata con accurate sperienze.

22. Ci siamo un po' dilungati in queste considerazioni per chiarire il precedente nostro concetto, basato su la previsione galileana, che assai probabilmente la scienza giungerà man mano ad interpretare le così dette *energie di posizione* col mezzo delle *energie cinetiche* delle parti costituenti successivamente quei sistemi subordinati e meno complessi, de' quali ogni corpo è costituito.

Laddove il Maxwell, sebbene si mostri incline verso una tale opinione, non è risoluto nell'accoglierla.

23. Dove poi emerge più distinta la forza intellettiva del nostro autore, per esporre con forme elementari i più ardui problemi, egli è negli ultimi due capitoli, che trattano delle vibrazioni pendolari de' gravi terrestri, e delle leggi della gravitazione universale, applicate ai grandi fatti della dinamica celeste.

Certo che qua e là si scorgono alcuni punti meno chiari, in causa dei limitati mezzi d'analisi di cui vuol giovarsi l'autore; ma è sempre rimarchevole la elevatezza e la sufficiente esattezza delle considerazioni, alle quali egli sa grado grado condurre il lettore, con mezzi tanto limitati.

24. E per quanto abbiamo sin da principio notato intorno alle attinenze dei metodi geometrici, seguiti dal Maxwell esponendo i principî di cinematica e di dinamica, con quelli usati già dal Galileo e meglio svolti dal Mossotti, abbiamo creduto che potesse riuscire di opportuno complemento a questo bel lavoro

del Maxwell, massime per noi italiani, il riprodurre qui in un *Appendice* alcune parti delle lezioni del Mossotti, tanto più che tale sua opera: *Lezioni elementari*, ecc., in oggi ben difficilmente la si trova nel commercio librario, essendo da gran tempo esaurita l'unica edizione che di essa venne fatta [1].

Giovanni Cantoni.

---

[1] Le note da me aggiunte al Maxwell ed al Mossotti vennero contrassegnate in calce colle iniziali G. C.

CAPITOLO PRIMO.

Introduzione.

1. *Obbietto della fisica.* — La fisica è quel ramo dello scibile che investiga l'ordine nella natura, ossia la regolare successione degli eventi.

Il nome di fisica è spesso applicato in modo più o meno ristretto a quei rami della scienza che considerano i fenomeni di forma più semplice e più astratta, senza preoccuparsi dei fenomeni più complessi, quali sarebber quelli proprî degli esseri viventi.

Il più semplice caso è quello in cui un fatto o fenomeno può descriversi siccome un cangiamento nella disposizione relativa di dati corpi. Così possiamo descrivere il movimento lunare collo stabilire i cangiamenti di posizione della luna rispetto alla terra, in quell'ordine in cui succedonsi l'un l'altro.

In altri casi noi possiamo bensì conoscere esser avvenuto un cangiamento di posizione, senza poter metter in chiaro in che esso consista. Così quando l'acqua agghiaccia, noi conosciamo che le molecole, o le minime particelle della materia, devono essere differentemente disposte nel ghiaccio e nell'acqua. Conosciamo pure che questa disposizione nel ghiaccio debba avere una certa specie di simmetria, dacchè il ghiaccio ha la forma di cristalli simmetrici; ma non abbiamo, sino ad ora, alcuna precisa conoscenza della effettiva disposizione delle molecole nel ghiaccio stesso.

Ogniqualvolta però ci è dato descrivere completamente il cambiamento occorso nella disposizione, abbiamo allora una cognizione, perfetta in tutta la sua estensione, di ciò che ebbe luogo, quantunque

possano rimanere ancora ad apprendersi le condizioni necessarie, date le quali, un simile evento sempre avrà luogo.

La prima parte della scienza fisica pertanto si riferisce alla posizione relativa e al movimento dei corpi.

2. *Definizione di un sistema materiale.* — In ogni procedimento scientifico si comincia dal contrassegnare un dato soggetto siccome campo d'investigazione, e si concentra su questo l'attenzione, non curandosi del rimanente dell'universo, sino a che siasi compiuta l'investigazione proposta.

Nella scienza fisica pertanto devesi anzitutto nettamente definire il sistema materiale, che prendiamo a soggetto delle nostre indagini. Questo sistema può essere più o meno complesso, può essere una semplice particella di materia, un corpo di forma limitata, o un numero qualsiasi di corpi, e può estendersi sino ad includere tutto l'universo materiale.

3. *Definizioni di relazioni interne ed esterne.* — Ogni relazione od azione fra una parte d'un dato sistema ed un'altra chiamasi *relazione* od *azione interna.*

Quelle fra il tutto o una parte d'un sistema, e i corpi non inclusi in esso, diconsi *relazioni* od *azioni esterne.* Di queste ci occupiamo solo in quanto esse operano sul sistema stesso, tralasciando ogni considerazione circa i loro effetti sui corpi esterni. Le relazioni od azioni fra corpi non inclusi nel sistema non le si considerano punto: poichè, investigandole, varrebbe quanto ammettere che quest'altri corpi facciano parte di quel sistema.

4. *Definizione di figura.* — Quando un sistema materiale viene considerato in riguardo alla posizione relativa delle sue parti, l'assieme di queste posizioni relative dicesi la *figura* del sistema.

La conoscenza della figura d'un sistema in un dato istante implica la conoscenza della posizione di ciascun punto del sistema, rispetto ad ogni altro suo punto nell'istante medesimo.

5. *Diagrammi.* — La figura dei sistemi materiali può rappresentarsi mediante modelli, piani o diagrammi. Il diagramma si assume come rappresentativo di un sistema materiale unicamente nella forma, escluso ogni altro riguardo.

Un piano o mappa rappresenta su un foglio in due dimensioni ciò che realmente ha tre dimensioni, e che perciò può essere rappresentato completamente soltanto da un modello. Dobbiamo usare il vocabolo *diagramma* per indicare qualsivoglia figura geometrica, piana o no, col mezzo della quale noi studiamo le proprietà di un sistema materiale. Così allorquando parliamo di figura di un sistema, l'immagine

che ci formiamo nella nostra mente è quella di un diagramma che ce ne rappresenti completamente la figura; ma nessun'altra proprietà del sistema materiale.

Oltre i diagrammi di figura, possiamo avere diagrammi di velocità, di forza, ecc. ecc., i quali non rappresentano la forma del sistema, ma ci permettono di studiare le velocità relative, o le forze interne de' varî suoi punti.

6. *Particella materiale.* — Un corpo talmente piccolo, che si possano trascurare, per lo scopo della indagine nostra, le distanze fra le varie sue parti, dicesi una *particella materiale.*

Gli è per tal modo che in certe ricerche astronomiche i pianeti, e anche il sole, possono risguardarsi ciascuno siccome una particella materiale, quando per noi svaniscono le differenze nelle varie parti di questi corpi. Invece non possiamo considerarli come particelle materiali, quando ne studiamo la rotazione. Anche un atomo, quand'è considerato capace di rotazione, va riguardato siccome costituito da parecchie parti materiali.

Il diagramma di una particella materiale è un punto matematico senza figura.

7. *Posizione relativa di due particelle materiali.* — Il diagramma di due particelle materiali consta di due punti, quali, per esempio, A e B.

La posizione di B rispetto ad A è indicata dalla direzione e lunghezza della retta $\overline{AB}$, tirata da A a B. Se si parte da A e si cammina nella direzione indicata dalla linea $\overline{AB}$ per una distanza eguale alla lunghezza di questa linea, si arriverà in B. Questa direzione e distanza può del pari essere individuata da un'altra linea, come $\overline{ab}$, parallela ed eguale ad $\overline{AB}$. La posizione di A rispetto a B è individuata dalla direzione e lunghezza della linea $\overline{BA}$, tirata da B ad A, o della linea $\overline{ba}$ eguale e parallela a $\overline{BA}$.

Risulta evidente che $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Nel designare una linea mediante le lettere alle sue estremità, il loro ordine è sempre quello nel quale è a condursi la linea.

8. *Vettori.* — L'espressione $\overline{AB}$, geometricamente, è soltanto l'indicazione di una linea. Qui essa indica l'operazione mediante la quale la linea è tirata, quella cioè di trasportare un punto, che lasci traccia in una data direzione per una data distanza. Come espressione di una operazione, $\overline{AB}$ dicesi un *vettore,* e l'operazione è completamente definita dalla direzione e dalla distanza del trasporto.

Il punto di partenza, detto *origine del vettore,* può esser dovunque.

Per definire una linea retta finita dobbiamo stabilire tanto la sua origine quanto la sua direzione e lunghezza. Però tutti i vettori che siano paralleli tra loro, guidati nello stesso verso e d'egual lunghezza, si considerano come eguali.

Una quantità, quale ad esempio una velocità od una forza, che abbia una direzione e una grandezza definite, può considerarsi come un vettore, e può designarsi in un diagramma mediante una retta la cui direzione sia parallela al vettore, e la cui lunghezza rappresenti, secondo una data scala, la grandezza del vettore.

9. *Sistema di tre particelle.* — Consideriamo ora un sistema di tre particelle.

La sua figura è rappresentata da un diagramma di tre punti A, B, C. La posizione di B rispetto ad A è individuata dal vettore $\overline{AB}$, e quella di C rispetto a B dal vettore $\overline{BC}$.

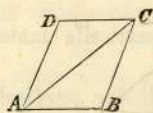



Fig. 1.

Ne consegue che, quando sia noto A, possiamo trovare B e quindi C: cosicchè la figura di questi tre punti è completamente determinata.

La posizione di C rispetto ad A è indicata dal vettore $\overline{AC}$, e, giusta l'ultima considerazione, il valore di $\overline{AC}$ deve potersi dedurre da quelli di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Il risultato dell'operazione $\overline{AC}$ è di portare il punto di traccia da A in C; lo stesso risultato s'ottiene trasportando il punto di traccia, prima da A in B, e quindi da B in C: cioè, questa operazione equivale alla somma delle operazioni $\overline{AB}+\overline{BC}$.

10. *Addizione dei vettori.* — Ne consegue che la regola per l'addizione dei vettori può enunciarsi così: Si tirino da un punto preso come origine i successivi vettori in serie, per modo che ogni vetotre incominci al termine del precedente. La retta condotta dall'origine alla estremità della serie rappresenta il vettore che è la somma dei vettori.

L'ordine dell'addizione è indifferente, perchè se scriviamo $\overline{BC}+\overline{AB}$, l'operazione indicata si può effettuare conducendo AD parallela ed eguale a BC, e congiungendo quindi $\overline{DC}$, mediante una retta che (vedi Euclide I, 33) è parallela ed eguale ad $\overline{AB}$, per modo che con queste

due operazioni arriviamo, qualunque siasi l'ordine in cui si eseguiscono, allo stesso punto C.

E ciò sta pure per qualsivoglia numero di vettori, presi pure in qualsivoglia ordine [1].

11. *Sottrazione di un vettore da un altro.* — Ad esprimere la posizione di C rispetto a B, mediante quella di B e C rispetto ad A, osserviamo che si può andare da B in C, sia seguendo la retta $\overline{BC}$, sia andando da B in A e quindi da A in C. Pertanto:

$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$$

$= \overline{AC} + \overline{BA}$, essendo indifferente l'ordine dell'addizione.

$= \overline{AC} - \overline{AB}$, essendo $\overline{AB}$ eguale ed opposto a $\overline{BA}$.

Ora il vettore $\overline{BC}$, che esprime la posizione di C rispetto a B, lo si trova sottraendo il vettore di B da quello di C, poichè questi vettori sono rispettivamente condotti da una comune origine A.

12. *Origine dei vettori.* — Le posizioni di qualsivoglia numero di particelle, appartenenti a un sistema materiale, ponno individuarsi mediante i vettori condotti da un qualche punto a ciascuna di esse. Il punto dicesi l'origine dei vettori, o, più brevemente, l'*origine*.

Questo sistema di vettori determina la figura dell'intiero sistema; giacchè, se vogliamo conoscere la posizione di un punto B rispetto ad un altro punto A, la possiamo ricavare mediante i vettori $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ dall'equazione:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Si può prendere un punto qualsiasi per l'origine, e quindi, pel momento, non v'ha ragione perchè si debba scegliere piuttosto l'uno che l'altro. La figura del sistema — vale a dire la posizione delle sue parti l'una rispetto all'altra — rimane la stessa, qualunque sia il punto scelto per origine. Parecchie ricerche, nonpertanto, vengono semplificate da una appropriata scelta del punto.

13. *Posizione relativa di due sistemi.* — Quando si conoscano le figure di due sistemi differenti, aventi una diversa origine, e si voglia includerli entrambi in un sistema più largo, che abbia la stessa origine del primo, dobbiamo precisare la posizione dell'origine del secondo di questi sistemi rispetto a quella del primo, e dobbiamo altresì poter con-

---

(1) La regola qui svolta dal Maxwell, per l'addizione dei vettori, corrisponde esattamente a quella seguita da Galileo per la composizione di più movimenti, impressi contemporaneamente o successivamente ad un dato punto mobile; ed è di quest'ultima che il Mossotti si giovò per costituire quasi tutta la dinamica, come vien accennato nella prefazione di quest'opera del Maxwell. G. C.

durre nel secondo sistema delle linee parallele a quelle condotte nel primo.

P.

Fig. 2.

O. O'.

Perciò, come s'è veduto sopra al § 9, la posizione di un punto del secondo sistema, rispetto alla prima origine O, è rappresentata dalla somma del vettore OP di questo punto rispetto alla seconda origine O' e del vettore OO' della seconda origine O' rispetto alla prima O.

14. *Tre dati pel paragone di due sistemi.* — Noi abbiamo un esempio di questa formazione di un sistema più grande, mediante due o più altri minori, quando due nazioni finitime, dopo d'avere misurato e rilevato ciascheduno il proprio territorio, convengono di allacciare i loro rilievi, per modo da includere i due paesi in un sistema unico. A questo intento richiedonsi tre cose:

1.° Un raffronto dell'origine scelta dall'un paese con quella prescelta dall'altro.

2.° Un raffronto fra le direzioni di riferimento adottate nei due paesi.

3.° Un raffronto dei tipi di misura rispettivamente adottati.

Ad esempio. Nei paesi civilizzati la latitudine è sempre calcolata dall'equatore; mentre la longitudine lo è da un punto arbitrario, come Greenwich o Parigi. Ne segue che, per raccordare la mappa della Gran Bretagna con quella della Francia, devesi precisare la differenza di longitudine fra l'osservatorio di Greenwich e quello di Parigi.

A comparare poi il rilievo della Francia con quello della Gran Bretagna, devesi prima raffrontare il metro, modulo di lunghezza in Francia, col *yard*, modulo di lunghezza della Gran Bretagna.

Il *yard* è definito da un Atto del Parlamento (18 e 19 Vict. c. 72 del 30 luglio 1855) che stabilisce: "la linea retta o distanza fra i centri delle linee trasversali delle due caviglie d'oro nella sbarra di bronzo, depositata nell' ufficio dello Scacchiere, sarà il vero modulo *yard* a 62° Fahrenheit, ed ove si perdesse, verrà sostituito mediante le sue copie."

Il metro deriva la propria autorità da una legge del 1795 della Repubblica francese. Esso è così definito: la distanza fra le estremità di una data verga di platino, costrutta da Borda, allorquando essa trovasi alla temperatura del ghiaccio fondentesi. Dalle misure del capitano Clarke risultò che il metro equivale a 39,37043 pollici inglesi.

15. *Idea di spazio.* — Finora abbiam parlato di quanto concerne la figura di un sistema materiale. Tuttavia ci rimangono ancora alcuni punti riflettenti la metafisica del soggetto, e che hanno pure una grande importanza dal lato fisico.

Descrivemmo già il metodo per combinare parecchie figure in un sistema, che tutte le includa. Analogamente possiamo dalla piccola regione, che ci sta intorno, spingerci ad esplorare regioni più lontane, alle quali ci rechiamo con qualunque mezzo di trasporto. Oltre a ciò possiamo venire a conoscenza d'altri luoghi, per altrui notizia, ed anche di regioni inaccessibili, la cui posizione viene solo accertata mediante un processo di calcolo.

Sinchè, alla perfine, veniamo a riconoscere che ogni luogo ha una posizione definita rispetto a qualsivoglia altro, sia questo secondo accessibile o meno dal primo.

Per tal modo, da misure fatte sulla superficie della terra, deduciamo la posizione del suo centro, rispetto ad oggetti conosciuti, e calcoliamo il numero dei chilometri cubici che misurano il volume della terra; e ciò indipendentemente affatto da qualunque ipotesi su quanto può esistere nel centro della stessa, o in qualsivoglia luogo al disotto del sottile strato di corteccia, che possiamo esplorare direttamente.

16. *Errore di Descartes.* — Appare pertanto che la distanza fra un oggetto e un altro non dipende da alcun altro oggetto materiale ad essi frapposto, come parve asserire Descartes quando disse (*Princip. Phil. II, 18*) che ove si estraesse il contenuto di un vaso cavo, senza che un altro subentrasse a riempirlo, le pareti del vaso, non avendo frapposto alcunchè, verrebbero a contatto.

Questa asserzione è fondata sul dogma di Descartes che l'estensione in lunghezza, larghezza e profondità, che costituisce lo spazio, sia l'unica essenziale proprietà della materia. " La natura della materia o di un corpo in generale, „ dice egli, " non consiste nell'essere un oggetto duro, o pesante, o colorato; sibbene unicamente nell'essere un ente esteso in lunghezza, larghezza e profondità. „ (*Princip. II, 4*). Col confondere così la proprietà dell materia con quella di spazio, egli arriva a questa logica conclusione, che ove si potesse completamente cavare la materia contenuta in un vaso, lo spazio entro il medesimo non potrebbe più esistere. Epperò egli ammette che ogni spazio debba essere ripieno di materia.

Volli ricordare codesta opinione di Descartes, affine di mostrare l importanza di profonde vedute nella dinamica elementare. Tuttavia la precipua proprietà della materia fu nettamente annunziata da Descàrtes nell'opera anzidetta, e denominata la *prima legge della natura* (*Prin-*

cip. II, 37): “ogni individua cosa, per quanto è in lei, persevera nel medesimo stato, sia questo di riposo o di moto.„

Allorchè verremo alle leggi del moto di Newton, vedremo che nelle parole “per quanto è in lei„ propriamente intese, è basata la vera e prima definizione di materia, e la vera misura della sua quantità. Tuttavia Descartes non arrivò mai a intendere completamente le proprie parole *(quantum in se est)*, e quindi ricadde nella primitiva confusione della materia collo spazio: essendo lo spazio, secondo lui, l'unica forma di sostanza, e non essendo tutti gli altri enti che affezioni dello spazio.

Questo errore riscontrasi per tutta la grande opera di Descartes, e forma uno dei fondamenti del sistema di Spinoza. Nè intraprenderò di seguirlo sino ai tempi più moderni; vorrei solo avvertire coloro, i quali studiano alcun sistema di metafisica, di esaminare accuratamente quella parte di esso che si occupa delle idee fisiche.

E si troverà che torna assai più proficuo al progresso scientifico il riconoscere con Newton le idee di spazio e di tempo, siccome distinte, almeno mentalmente, da quelle del sistema materiale, le cui relazioni vengono appunto da queste idee coordinate.

17. *Concetto del tempo.* — L'idea del tempo, nella sua forma primitiva, è probabilmente la ricognizione di un ordine di successione nei nostri stati di consapevolezza.

Se la mia memoria fosse perfetta, potrei riferire, dietro la mia propria esperienza, ogni evento al suo luogo conveniente, in una serie cronologica.

Ma mi tornerebbe difficile, per non dire impossibile, di paragonare l'intervallo fra una coppia di eventi ed un'altra; di precisare, a cagion d'esempio, se il tempo, durante il quale posso occuparmi senza sentirmi stanco, sia maggiore o minore ora, di quando per la prima volta mi posi a studiare.

Mediante le nostre relazioni colle altre persone e l'esperienza nostra dei processi naturali che si susseguono in un modo uniforme o ritmico, veniamo a riconoscere la possibilità di disporre un sistema cronologico, nel quale gli eventi tutti debbono trovare il loro posto, sia che li si riferiscano a noi stessi, o ad altri.

Prendiamo a considerare due eventi qualunque: come il perturbamento recente della stella nella Corona boreale, che cagionò i luminosi effetti osservati spettroscopicamente da Huggins il 16 maggio 1866, e l'induzione mentale che primamente guidò il professore Adams od il Leverrier a intraprendere le ricerche che trassero il dottor Galle alla scoperta fatta il 23 settembre 1846 del pianeta Nettuno. Di necessità il primo

di questi eventi deve aver avuto luogo, o prima, o dopo il secondo, od altrimenti al medesimo tempo.

Il tempo assoluto, vero e matematico vien concepito da Newton, come decorrente con un rapporto costante ed indipendente dall'affrettarsi od indugiarsi dei movimenti delle cose materiali, e perciò viene chiamato *durata*.

Il tempo relativo, apparente e comune, è la durata, valutata mediante il moto di dati corpi; tal'è de' giorni, mesi ed anni. Queste misure del tempo debbono riguardarsi come provvisorie; giacchè il progresso dell'astronomia ci apprese a misurare le ineguaglianze nelle lunghezze dei giorni, mesi ed anni, e quindi a ridurre il tempo apparente a una scala più uniforme, detta *tempo medio solare*.

18. *Spazio assoluto.* — Lo spazio assoluto vien concepito come serbantesi sempre simile a sè stesso ed inamovibile. La disposizione delle parti dello spazio non può menomamente essere alterata, più di quello che lo possa l'ordine delle porzioni del tempo. Concepire che esse si muovano dal loro posto, val quanto concepire che un luogo si trasporti altrove da sè stesso.

Ma, come in niun modo possiam distinguere una porzione di tempo da un'altra, fuorchè pei diversi eventi che in esse ebber luogo, così nulla v'ha per distinguere una parte di spazio da un'altra, se non riferendola al luogo di corpi materiali. Nè possiamo descrivere il tempo di un evento fuorchè riferendolo ad un altro evento, od il luogo di un corpo se non col riferirlo a qualche altro corpo.

Ogni nostra conoscenza, sia di tempo che di spazio, è essenzialmente relativa.

Allorchè si è acquistata l'abitudine di accozzare insieme delle parole, senza poi preoccuparsi di formare i concetti, ai quali si ritiene che corrispondano, torna facile il costrurre un'antitesi fra questa cognizione relativa e una così detta cognizione assoluta, e mostrare l'ignoranza nostra della posizione assoluta di un punto, come un esempio della limitazione delle nostre facoltà. Ed invero chiunque volesse affaticarsi ad immaginare lo stato di una mente capace di conoscere la posizione assoluta di un punto, finirebbe coll'acquetarsi d'una cognizione relativa.

19. *Una massima generale della scienza fisica.* — V'ha una massima di spesso citata che "le medesime cause debbono sempre produrre i medesimi effetti."

A rendere intelligibile questo assioma, devesi definire che intendasi per cause eguali ed effetti eguali: dappoichè è manifesto che niun evento può aver luogo più di una volta, per ciò che le cause e gli effetti non possono essere eguali sotto *tutti* i riguardi.

Quando però le cause differiscono soltanto rispetto al tempo assoluto od allo spazio assoluto in cui gli eventi accaddero, allora gli effetti saranno gli stessi.

L'espressione seguente, che equivale alla massima suaccennata, sembra meglio definita e esplicitamente connessa colle idee di spazio e di tempo, oltrechè maggiormente suscettibile d'applicazione ai singoli casi:

" La differenza fra un evento ed un altro non dipende dalla semplice differenza dei tempi o luoghi ove accadono, ma unicamente dalle differenze nella natura, figura o movimento dei corpi che intervengono in tali eventi. "

Ne consegue che se un evento ebbe luogo in un dato tempo e luogo, torna possibile che un evento esattamente simile possa accadere in altro tempo e in altro luogo.

Avvi un'altra massima che non deve essere confusa con quella citata al principio di questo articolo, che suona: " Eguali cause producono eguali effetti. "

Ciò è vero soltanto quando le piccole variazioni nello stato iniziale del sistema producono solo piccole variazioni nello stato finale del medesimo. Questo si verifica in gran numero di fenomeni fisici.

Ma vi sono pure altri casi pei quali una piccola variazione iniziale può produrre un cangiamento rilevante nello stato finale del sistema, come allorquando lo spostamento dei punti obbliga un treno a portarsi su di un altro binario, a vece di proseguire il proprio cammino.

CAPITOLO II.

Del moto.

20. *Definizione di spostamento.* — Paragonammo di già la posizione dei differenti punti di un sistema nel medesimo istante di tempo. Dobbiamo ora confrontare la posizione di un punto in un dato istante con quella ad un istante antecedente, detto *epoca.*

Il vettore che indica la posizione finale di un punto, rispetto a quella che aveva all'epoca, dicesi lo spostamento di questo punto. Così se A′

è la posizione iniziale, ed A_2 la finale del punto A la linea $\overline{A_1A_2}$ è lo spostamento di A, ed ogni vettore *oa*, condotto dall'origine *o* parallelamente ed eguale ad $\overline{A_1A_2}$ indica lo *spostamento*.

21. *Diagramma di spostamento.* — Se un altro punto del sistema è spostato da B_1 a B_2, il vettore *ob* parallelo ed eguale a $\overline{B_1B_2}$ indica lo spostamento di B.

Similmente lo spostamento di qualsivoglia numero di punti può rappresentarsi coi vettori condotti dalla medesima origine *o*.

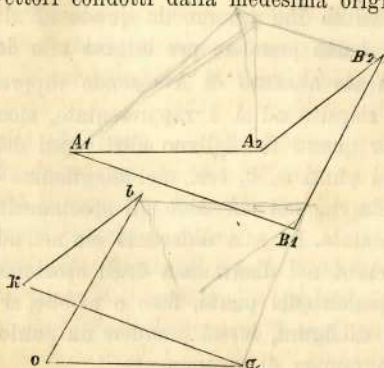



Fig. 3.

Questo sistema di vettori dicesi il *diagramma di spostamento*. Non è necessario di condurre effettivamente le linee per rappresentare questi vettori, ma è sufficiente di indicare i punti *a*, *b*, ecc., all'estremità dei vettori. Il diagramma di spostamento può quindi riguardarsi come consistente in un numero di punti *a*, *b*, ecc., corrispondenti colle particelle materiali A, B, ecc., che appartengono al sistema, unitamente ad un altro punto *o*, la cui posizione è rbitraria, e che si assume come origine di tutti i vettori.

22. *Spostamento relativo.* — La linea $\overline{ab}$ nel diagramma di spostamento rappresenta lo spostamento del punto B rispetto ad A.

Infatti, se nel diagramma di spostamento (Fig. 3) conduciamo $\overline{ak}$ parallela ed uguale a $\overline{B_1A_1}$ e nella medesima direzione, e congiungiamo $\overline{kb}$, torna facile il dimostrare che $\overline{kb}$ è eguale e parallela ad $\overline{A_2B_2}$.

Ed invero il vettore $\overline{kb}$ è la somma dei vettori $\overline{ka}$, $\overline{ao}$ ed $\overline{ob}$, e $\overline{A_2B_2}$ è la somma di $\overline{A_2A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{B_1B_2}$. Ma di questi $\overline{ka}$ è lo stesso che $\overline{A_1B_1}$, *oa* è lo stesso che $\overline{A_1A_1}$, ed $\overline{ob}$ che $\overline{B_1B_2}$; e poichè l'ordine di somma è indifferente (§. 10), così il vettore $\overline{kb}$ è lo stesso in direzione e grandezza di $\overline{A_2B_2}$.

Ora $\overline{ka}$, od $\overline{A_1B_1}$ rappresenta la posizione originaria, e *kb* od A_2B_2

la posizione finale di B rispetto ad A. E pertanto ab rappresenta lo spostamento di B rispetto ad A, come si voleva dimostrare.

Poc'anzi (§ 20) abbiamo di proposito ommesso di dire se l'origine a cui era riferita la figura originaria, e quella a cui lo è la figura finale, siano assolutamente lo stesso punto, o se, durante lo spostamento del sistema, venga pure spostata l'origine.

Possiamo ora, per riguardo all'argomento, supporre che l'origine sia assolutamente fissa, e che gli spostamenti rappresentati da $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, ecc., siano spostamenti assoluti. Per passare da questo all'altro caso, in cui l'origine è spostata, basta prendere per origine uno dei punti mobili come A. Lo spostamento assoluto di A essendo rappresentato da $\overline{oa}$, lo spostamento di B rispetto ad A è rappresentato, siccome vedemmo, da ab, e così via per quanti si vogliano altri punti del sistema.

La disposizione dei punti a, b, ecc., nel diagramma di spostamento è quindi la stessa, sia che noi riferiamo gli spostamenti ad un punto fisso, o esso pure spostato. La sola differenza sta nell'adottare una differente origine di vettori nel diagramma degli spostamenti.

Tal'è la regola: qualsivoglia punto, fisso o mobile, si prenda ad origine del diagramma di figura, devesi prendere un punto corrispondente come origine del diagramma di spostamento.

Se desideriamo indicare il fatto dell'essere noi affatto ignari dell' assoluto spostamento nello spazio di qualunque punto del sistema, lo possiam fare costruendo il diagramma di spostamento, come un semplice sistema di punti, senza indicare in modo veruno quae di essi venne preso ad origine. Questo diagramma di spostamento (senza un'origine) ci rappresenterà allora nè più nè meno che tutto quanto possiamo conoscere circa lo spostamento del sistema. Esso consta semplicemente di un numero di punti a, b, c, ecc., corrispondenti ai punti A, B, C, del sistema materiale, ed un vettore, quale $\overrightarrow{ab}$, rappresenta lo spostamento di B rispetto ad A.

23. *Spostamento uniforme* (1). — Quando gli spostamenti di tutti i punti di un sistema materiale, rispetto a un punto esterno, sono gli stessi in direzione e grandezza, il diagramma di spostamento si riduce a due punti: l'uno corrispondente al punto esterno, e l'altro ad ogni e singolo punto del sistema spostato.

In tal caso i punti del sistema non risultano spostati gli uni rispetto agli altri, ma soltanto con riguardo al punto esterno.

---

(1) Quando i valori simultanei di una quantità per differenti corpi o luoghi sono eguali si dice che la quantità è *uniformemente* distribuita nello spazio.

Questo modo di spostamento accade allorquando un corpo, di forma invariabile, si muove parallelamente a sè stesso, e può chiamarsi spostamento uniforme.

24. *Moto.* — Quando il cambiamento di figura di un sistema vien considerato unicamente rispetto al proprio stato, nel principio ed alla fine del processo di mutazione, e senza riguardo alcuno al tempo durante il quale si effettua, si dice allora di considerare lo *spostamento del sistema.*

Quando poi volgiamo la nostra attenzione allo stesso processo di mutazione, come effettuantesi durante un certo tempo ed in una maniera continua, il cambiamento di figura viene ascritto al moto del sistema.

25. *Continuità del moto.* — Allorchè una particella materiale si sposta per modo da passare da una ad un'altra posizione, ciò può avvenire solo mercè il cammino fatto da essa, lungo qualche via o strada, dall'una all'altra di queste posizioni.

In ogni istante della durata di questo moto la particella dovrà trovarsi in qualche punto del cammino, e qualunque punto di questo si scelga, la particella lo passerà durante il suo movimento, almeno una volta [1].

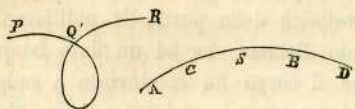



Fig. 4.

Il che si esprime dicendo che la particella descrive un *cammino continuo.*

Il moto di una particella materiale, avente un'esistenza continua in tempo e luogo, è il tipo e l'esempio di ogni forma di continuità.

26. *Velocità costante* — Se il movimento di una particella è tale che in intervalli di tempi eguali, per quanto piccoli, gli spostamenti della particella sono eguali e nella medesima direzione, si dice che la particella muovesi con *velocità costante* [2].

Egli è manifesto che, in questo caso, il cammino del corpo sarà una linea retta, e la lunghezza di ciascuna parte del cammino sarà proporzionale al tempo impiegato a descriverla.

---

(1) Se la via si taglia in guisa da formare un nodo come P, Q, R, la particella passerà il punto di intersezione Q' due volte. E se la particella ritorna sulla propria via, come in quella A, C, S, B, D, essa può ripassare lo stesso punto S tre o più volte.

(2) Quando i successivi valori di una quantità, per successivi istanti di tempo, sono eguali, si dice che la quantità è *costante.*

La misura o grandezza del movimento è detta la velocità della particella, e la sua grandezza si esprime col dire che essa è una data distanza in un dato tempo, come per es., dieci miglia in un'ora, oppure un metro per minuto secondo. In generale scegliesi un'unità di tempo, quale il minuto secondo, e misuriamo la velocità mediante la distanza in metri percorsa nell'unità di tempo.

Se un metro è percorso in un secondo, e se la velocità è costante, una millesima od una milionesima parte di metro verrà percorsa in un millesimo o milionesimo di secondo. Pertanto, ove possiamo osservare o calcolare lo spostamento durante un intervallo di tempo, per quanto piccolo, potremo dedurre la distanza che verrebbe percorsa in un tempo più lungo colla stessa velocità.

Questo risultato che ci permette di determinare la velocità durante un breve intervallo di tempo, non dipende da ciò che il corpo continui effettivamente a muoversi colla stessa misura durante un tempo più lungo. Così noi possiamo conoscere che un corpo si muove in ragione di dieci miglia all'ora, quantunque il suo moto con questo rapporto duri soltanto un centesimo di secondo.

27. *Misura della velocità variabile.* — Quando la velocità di una particella non è costante, il suo valore in ogni istante è misurato dalla distanza che sarebbe percorsa nell'unità di tempo da un corpo che avesse la momentanea velocità della particella nell'istante medesimo.

Così allorquando diciamo che ad un dato istante, per es., un minuto secondo dopo che il corpo ha cominciato a cadere, la sua velocità è di 980 centimetri per secondo, noi intendiamo, che se la velocità di una particella fosse costante ed eguale a quella del corpo che cade ad un dato istante, essa descriverebbe 980 centimetri in un secondo.

Importa anzitutto di capire ciò che intendesi per velocità o ragione del movimento d'un corpo, perchè le idee che vengono suggerite alla nostra mente dal considerare il moto di una particella sono quelle che Newton usò nel suo Metodo delle Flussioni [1], e restano inadeguate alla grande estensione che la matematica ottenne ai tempi nostri.

28. *Diagramma della velocità.* — Se la velocità di ciascuno dei corpi di un dato sistema è costante, e se paragoniamo le figure del sistema nell'intervallo di un'unità di tempo, gli spostamenti, siccome prodotti nell'unità di tempo in corpi moventisi con velocità costante, rappre-

(1) Secondo il Metodo delle Flussioni, quando il valore di una quantità dipende da quello di un'altra, la misura di variazione della prima rispetto alla seconda può essere espressa come una velocità, immaginando che la prima quantità rappresenta lo spostamento di una particella, mentre la seconda scorre uniformemente col tempo.

senteranno queste velocità secondo il metodo di misura accennato poc'anzi (§ 26).

Se le velocità non continuano successivamente in modo costante per una unità di tempo, dobbiamo immaginare un altro sistema, il quale consista dello stesso numero di corpi, le velocità dei quali sieno le stesse di quelle dei corrispondenti corpi del sistema nel dato istante, ma rimangano costanti per un' unità di tempo. Gli spostamenti di questo sistema rappresenteranno la velocità del sistema proposto nel dato istante.

Il diagramma delle velocità di un sistema ad un dato istante può ottenersi in quest'altro modo: col prendere un piccolo intervallo di tempo, per es. la n^{sima} parte della unità di tempo, per modo che il mezzo di questo intervallo corrisponda all'istante dato, facendo il diagramma degli spostamenti corrispondenti a questo intervallo, ed ingrandendo tutte le sue dimensioni n volte. Il risultato sarà un diagramma di *velocità medie* del sistema durante l'intervallo. Se supponiamo ora che il numero n aumenti indefinitamente, l'intervallo diminuirà pure indefinitamente, e le velocità medie si approssimeranno indefinitamente alle velocità attuali nell'istante dato. Infine quando n diventa infinito il diagramma rappresenterà esattamente le velocità nel dato istante.

29. *Proprietà del diagramma delle velocità.* — Il diagramma delle velocità per un sistema formato da un numero di particelle materiali consiste in un numero di punti, corrispondenti ciascuno ad una delle particelle.

La velocità di qualsivoglia particella B, rispetto ad un'altra qualsiasi A, è rappresentata in direzione e grandezza, nel diagramma delle velocità, dalla linea $\overline{ab}$ condotta dal punto a, corrispondente ad A, al punto b corrispondente a B.

Possiamo di tal modo trovare, mediante il diagramma, la velocità relativa di due particelle qualsivogliano. Il diagramma nulla ci dice circa la velocità assoluta di ogni punto; esprime solo esattamente ciò che possiam conoscere intorno al movimento, e nulla più. Se immaginiamo che $\overline{oa}$ rappresenti la velocità assoluta di A, quella di un'altra particella B sarà rappresentata dal vettore $\overline{ob}$ tirato da o, come origine, al punto b, corrispondente a B.

Come torna impossibile il definire la posizione di un corpo, fuorchè rispetto alla posizione d'un dato punto di riferimento, così è impossibile il definire la velocità di un corpo, se non rispetto alla velocità d'un punto di riferimento. La frase velocità assoluta è tanto insignificante, quanto quella di posizione assoluta.

Perciò val meglio il non distinguere nel diagramma delle velocità

un dato punto siccome origine, e riguardare il diagramma come esprimente le relazioni di tutte le velocità, senza definire il valore assoluto di ognuna di esse.

Diagramma di figura

Diagramma di velocità.

Fig. 5.

30. *Che significhi la quiete.* — Quando diciamo che un corpo è in quiete, facciamo uso di un'espressione, che pare asserisca alcunchè intorno al corpo considerato in sè stesso, e possiamo immaginare che la velocità di un altro corpo, se calcolata rispetto al corpo in quiete, sia la sua vera e assoluta velocità. Laddove l'espressione " in quiete „ soltanto vuol significare " che un corpo non ha velocità rispetto a quella su cui esso sta, „ come, a cagion d'esempio, sulla superficie della terra, o sul ponte di un bastimento; nè può infatti esprimere più in là.

Non è scientifica pertanto la distinzione fra quiete e moto, come fra due differenti stati di un corpo in sè stesso. Dappoichè è impossibile il parlare di un corpo allo stato di quiete o di moto, se non riferendolo, implicitamente od esplicitamente, a qualche altro corpo.

31. *Variazione di velocità.* — Come abbiamo paragonate le velocità di differenti corpi in un medesimo tempo, così possiamo paragonare la velocità relativa di un corpo rispetto ad un altro in tempi differenti.

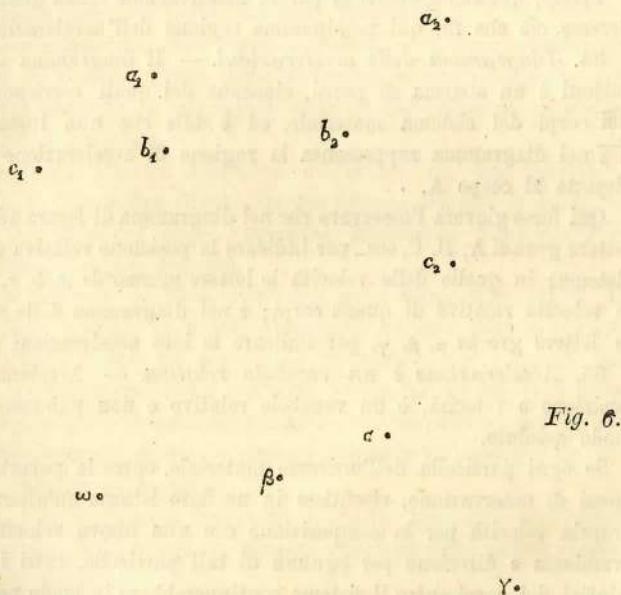
Sia a_1, b_1, c_1, il diagramma delle velocità del sistema di corpi, A, B, C nello stato d'origine ed a_2, b_2, c_2, il diagramma della velocità nello stato finale del sistema; se noi prendiamo un punto qualunque ω come origine, e conduciamo $\overline{\omega\alpha}$ eguale e parallela ad $\overline{a_1a_2}$, $\omega\beta$ eguale e parallela a $\overline{b_1b_2}$, $\omega\gamma$ eguale e parallela a c_1c_2, e così via, formeremo un diagramma di punti α, β, γ, ecc., tali che una linea $\alpha\,\beta$ in questo diagramma rappresenta in direzione e grandezza il cambiamento della

velocità di B rispetto ad A. Questo diagramma può chiamarsi il diagramma delle accelerazioni totali.

32. *Accelerazione.* — La parola accelerazione è qui usata per indicare una variazione qualsiasi nella velocità, sia essa un aumento, una diminuzione, od un cambiamento di direzione. Pertanto, invece di distinguere come nel linguaggio comune, fra accelerazione, ritardamento e deviazione del moto di un corpo, diremo che l'accelerazione può essere, nella direzione del moto, in direzione contraria, od obliqua a questa direzione.

Siccome lo spostamento di un sistema vien definito il cambiamento di figura del sistema, così l'accelerazione totale del sistema si definisce la variazione delle velocità del sistema. Il procedimento di costruzione del diagramma delle accelerazioni totali, mediante un raffronto fra i diagrammi iniziale e finale delle velocità, è lo stesso di quello secondo cui fu costruito il diagramma degli spostamenti, paragonando i diagrammi iniziale e finale di figura.

a_2 a_1 b_1 b_2 c_1 c_2 α ω β γ

Fig. 6.

33. *Ragione dell' accelerazione.* — Considerammo fin qui l'accelerazione totale che ha luogo durante un certo intervallo di tempo. Se la ragione dell' accelerazione è costante, essa è misurata dalla accelerazione totale nell'unità di tempo. Se è variabile, il suo valore in un dato istante è misurato dalla accelerazione totale nell' unità di tempo

di un punto, la cui accelerazione sia costante ed eguale a quella della particella nel dato istante.

Risulta, da questa definizione, che il metodo per dedurre la ragione dell'accelerazione dalla conoscenza della accelerazione totale in qualsivoglia dato tempo, è precisamente analogo a quello pel quale la velocità in un istante qualunque è dedotta dalla conoscenza dello spostamento in un dato tempo.

Il diagramma delle accelerazioni totali costruito per un intervallo della n^{esima} parte dell'unità di tempo, e quindi ingrandito n volte, è il diagramma delle medie ragioni di accelerazione durante questo intervallo: talchè, prendendo l'intervallo sempre più piccolo, arriviamo infine alla vera ragione dell'accelerazione nel mezzo di questo intervallo.

Siccome le ragioni di accelerazione vengono considerate nella fisica assai più di frequente che le accelerazioni totali, la parola accelerazione è usata nel senso in cui fin qui adoperammo la frase: ragione dell'accelerazione.

Perciò, quando useremo la parola accelerazione senza qualifica, intenderemo ciò che fin qui nominammo ragione dell'accelerazione.

34. *Diagramma delle accelerazioni.* — Il diagramma delle accelerazioni è un sistema di punti, ciascuno dei quali corrisponde ad uno dei corpi del sistema materiale, ed è tale che una linea qualunque $\overline{\alpha\,\beta}$ nel diagramma rappresenta la ragione di accelerazione del corpo B rispetto al corpo A.

Qui forse gioverà l'osservare che nel diagramma di figura adoperiamo le lettere grandi A, B, C, ecc., per indicare la posizione relativa dei corpi del sistema; in quello delle velocità le lettere minuscole a, b, c, ad indicare le velocità relative di questi corpi; e nel diagramma delle accelerazioni le lettere greche α, β, γ, per indicare le loro accelerazioni relative.

35. *Accelerazione è un vocabolo relativo.* — Accelerazione, come posizione e velocità, è un vocabolo relativo e non può essere inteso in modo assoluto.

Se ogni particella dell'universo materiale, entro la portata dei nostri mezzi di osservazione, risentisse in un dato istante un'alterazione nella propria velocità per la composizione con una nuova velocità, di egual grandezza e direzione per ognuna di tali particelle, tutti i movimenti relativi dei corpi entro il sistema continuerebbero in modo perfettamente continuo, e nè gli astronomi nè i fisici, pur adoprando ad ogni momento i loro istrumenti, giungerebbero a scoprire una mutazione qualsiasi.

Solo, quando il cambiamento di moto avviene in una maniera differente nei differenti corpi del sistema, può aver luogo l'osservazione di un evento qualunque.

CAPITOLO III.

Della forza.

36. *Cinematica e Cinetica.* — Sinora abbiamo considerato il moto di un sistema sotto un aspetto puramente geometrico. Abbiamo mostrato in qual modo si debba studiare e descrivere il movimento, comunque arbitrario, di un tal sistema, senza riflesso alcuno alle condizioni di moto originate dalla mutua azione fra i corpi.

La teoria del moto trattata di tal guisa dicesi *Cinematica*. Allorquando invece si prende in considerazione la mutua azione fra i corpi, la scienza del moto è detta *Cinetica;* e quando si pon mente in particolar modo alla forza quale causa di moto, chiamasi *Dinamica.*

37. *Mutua azione fra due corpi. - Sforzo.* — L'azione mutua fra due porzioni di materia riceve nomi differenti, secondo l'aspetto sotto il quale viene studiata, e tale aspetto dipende dall'ampiezza del sistema materiale che si considera.

Se consideriamo l'intero fenomeno dell'azione fra due porzioni di materia, noi lo chiamiamo *Sforzo.* Questo sforzo, secondo il modo con cui agisce, può indicarsi come Attrazione, Ripulsione, Tensione, Pressione, Torsione, Strappo, ecc. ecc.

38. *Forza esterna.* — Però, come già avvertimmo sopra (§ 2), noi possiamo talora limitare la nostra attenzione ad una data porzione di materia, e guardare solo un aspetto del fenomeno, cioè a quanto produsse una modificazione nella porzione stessa, ed in tal caso questo aspetto del fenomeno lo chiamiamo una *forza esterna,* ovvero, per riguardo alla causa del fenomeno stesso, lo possiam chiamare un'*azione* d'un'altra porzione di materia su la prima.

Se invece consideriamo il fenomeno dall'altro lato, cioè dall'aspetto opposto a quello dello sforzo, lo diciamo *reazione* della prima porzione di materia su l'altra.

39. *Differenti aspetti d'uno stesso fenomeno.* — A modo d'esempio, negli affari commerciali il medesimo contratto fra due parti dicesi Compera se consideriamo l'una, Vendita se l'altra parte, e Traffico o Commercio se le consideriamo entrambe.

Il contabile che esamina gli atti del contratto trova che le due parti lo hanno registrato sulle parti opposte dei rispettivi libri mastri, e nel

confrontare i libri egli deve in ogni caso aver in mente per quale interesse il libro sia compilato.

Similmente nelle investigazioni dinamiche dobbiamo sempre por mente quale dei due corpi prendiamo in ispeciale esame, per poter istabilire le forze in pro' di questo corpo: avvertendo di non porre alcune delle forze dal lato erroneo del calcolo.

40. *Leggi di Newton sul moto.* — La forza esterna od "impressa„ riferita al proprio effetto — cioè l'alterazione dei movimenti dei corpi — è completamente definita e descritta nelle tre leggi del moto di Newton.

La prima legge ci mostra in quali condizioni non vi sia alcuna forza esterna;

La seconda in qual modo misurare la forza quando esiste;

La terza paragonare i due aspetti della azione fra due corpi, sia che essa affetti l'uno o l'altro di essi.

41. *Prima legge del moto. — Ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto uniforme secondo una linea retta, sinchè un tale stato vien mutato da forze esterne.* [1]

L'argomento sperimentale della verità di questa legge è che, ogniqualvolta noi troviamo un'alterazione nello stato di movimento di un corpo, possiamo attribuire questa alterazione a qualche azione fra questo corpo ed un altro, vale a dire ad una forza esterna. L'esistenza di questa azione è indicata dai suoi effetti sull'altro corpo, quando il moto di questo possa essere osservato.

Così il movimento di una palla da cannone è ritardato: ma ciò dipende da un'azione fra il proiettile e l'aria che lo circonda, per cui la palla risente una forza in direzione opposta al suo moto relativo, mentre l'aria, sospinta in avanti da una forza eguale, vien posta essa stessa in movimento, e costituisce ciò che si chiama il *vento* della palla da cannone.

Ma la nostra convinzione della verità di questa legge viene avvalorata dal considerare ciò che implicherebbe la negazione di essa. Sia dato un corpo in movimento e in un dato istante venga abbandonato a sè stesso e non sollecitato da forza alcuna. Che avverrà? Secondo la legge di Newton esso persevererà a muoversi uniformemente secondo una linea retta, cioè la sua velocità rimarrà costante tanto in direzione, quanto in grandezza.

Se supponiamo che la velocità abbia a variare, ogni variazione di velocità (§ 31) deve avere una direzione e grandezza definita. Ma, d'altra

---

[1] Questa legge venne precedentemente esposta dal Keplero. G. C.

parte (§ 19), siffatta variazione deve essere la stessa, qualunque sia il tempo od il luogo dell'esperienza. La direzione del cambiamento di moto deve quindi essere determinata o dalla direzione del movimento stesso, o da qualche altra direzione fissata nel corpo.

Assumiamo primamente che la legge fosse: che la velocità diminuisse secondo un dato rapporto, che per una più sicura deduzione ammetteremo così piccola da non potersela, con esperienza alcuna sui corpi in moto, scoprire in un centinajo d'anni.

La velocità riferita a questa legge ipotetica non può essere che la velocità riferita ad un punto assolutamente in quiete; poichè se essa è una velocità relativa, la sua direzione, come la sua grandezza, dipendere devono dalla velocità del punto di riferimento.

Se, col riferire il corpo ad un certo punto, quello ci sembra muoversi verso nord con velocità decrescente, basterà che lo riferiamo ad un altro punto muoventesi verso nord con una velocità uniforme maggiore di quella del corpo, perchè ci appaja che esso si muova verso sud con una velocità crescente.

Pertanto questa legge ipotetica non ha significato, a meno che si ammetta la possibilità di definire la quiete assoluta ed il moto assoluto.

E quand'anche si ammettesse siffatta possibilità, la legge ipotetica, ove la si trovasse vera, potrebbe interpretarsi non come una contraddizione alla legge di Newton, ma come la prova dell'azione resistente di un mezzo che investa lo spazio.

Esaminiamo un altro caso. Suppongasi che la legge fosse questa: che un corpo, non sollecitato da forza alcuna, cessi ad un tratto di muoversi. Ciò sarebbe contraddetto non solo dall'esperienza, ma ci trarrebbe pure ad una definizione della quiete assoluta, siccome lo stato che un corpo assume, tostochè sia libero dall'azione delle forze esterne.

E così può ritenersi dimostrato che il negare la legge di Newton è un contraddire all'unico sistema di solida dottrina intorno allo spazio ed al tempo, quale lo può ideare la mente umana.

42. *Equilibrio delle forze.* — Quando un corpo si muove in linea retta con velocità costante, le forze esterne, se ve n'hanno, che agiscono su di esso, qualora si controbilanciano l'una l'altra, cioè sono in equilibrio.

Così, se in un treno ferroviario un carro si muove con velocità costante in linea retta, le forze esterne che su di esso agiscono — quali la trazione del carro in avanti che lo tira, il gancio di quello posteriore, lo sfregamento delle rotaje, la resistenza dell'aria che agisce a ritroso, il peso del carro che agisce all'ingiù, e la pressione delle ro-

taje che agiscono all'insù — devono esattamente controbilanciarsi le une colle altre.

I corpi in quiete rispetto alla superficie della terra non sono realmente in movimento, ed il loro moto non è nè costante, nè in linea retta; le forze quindi che agiscono su di essi non si controbilanciano esattamente. Il peso apparente dei corpi viene valutato dalla forza all'insù che si richiede per tenerli in riposo relativamente alla terra. Il peso apparente è quindi un poco meno della attrazione della terra e fa un piccolo angolo coll'asse di questo, per modo che l'effetto combinato della forza di sostegno e dell'attrazione della terra è una forza perpendicolare all'asse della terra, sufficiente per l'appunto ad obbligare il corpo a tenersi nel cammino circolare che deve descrivere, se riposa sulla terra.

43. *Definizione di tempi eguali.* — La prima legge del moto, collo stabilire in quali circostanze la velocità di un corpo in moto rimanga costante, ci fornisce un metodo per definire gli intervalli di tempo eguali.

Abbiasi un sistema materiale consistente di due corpi, i quali non agiscano l'uno sull'altro, e che non siano influenzati da alcun corpo esterno al sistema. Se uno dei detti corpi è in moto rispetto all'altro, la velocità relativa, per la prima legge del moto, sarà costante ed in linea retta.

Gli intervalli di tempo quindi saranno eguali quando sieno eguali gli spostamenti relativi durante questi intervalli.

Ma, se immaginiamo un altro sistema in atto di moto, e pure costituito da due corpi, ciascuno dei quali non sia influenzato da qualsivoglia altro corpo esterno, questo secondo sistema ci darà un metodo indipendente per paragonare gli intervalli di tempo.

Il dire quindi che intervalli di tempo eguali sono quelli durante i quali hanno luogo spostamenti eguali in ognuno dei sistemi, equivale all'asserire che il confronto degli intervalli di tempo guida al medesimo risultato, sia adoperando il primo sistema di due corpi, sia il secondo sistema, come accade coi nostri cronometri.

Vediamo così la possibilità teorica di paragonare degli intervalli di tempo comunque distanti, sebbene un tal metodo non possa praticarsi in prossimità della terra, o di qualsivoglia altra grande massa di gravitazione.

44. *Seconda legge del moto.* — *Ogni variazione di movimento è proporzionale alla forza impressa, ed ha luogo nella direzione in cui la forza è impressa.*

Qui per movimento Newton intende ciò che nel linguaggio scientifico moderno dicesi *momento,* nel quale si tiene in conto tanto la

quantità di materia in moto, quanto la ragione della velocità colla quale si muove.

Per forza impressa poi intende ciò che ora chiamasi *impulso*, nel quale viene considerato tanto il tempo durante il quale la forza agisce, quanto la intensità della forza.

45. *Definizione di masse eguali e di forze eguali.* — La esposizione di questa legge involge pertanto una definizione di quantità eguali di materia e di forze eguali.

Supponiamo che riesca possibile il far sì che la forza, colla quale un corpo agisce su di un altro, operi colla medesima intensità in differenti occasioni.

Ciò può ottenersi, ammettendo la permanenza delle proprietà dei corpi. Noi sappiamo che un filo di *caoutchouch*, quando viene stirato nel senso di allungarlo, esercita una tensione, la quale aumenta quanto più il filo si allunga; ed è per questa proprietà che il filo si dice *elastico*. Quando lo stesso filo venga stirato alla medesima lunghezza, se le sue proprietà rimangano costanti, eserciterà la medesima tensione.

Si leghi un capo di questo filo ad un corpo M, non sollecitato da altra forza eccetto la tensione del filo, e sia l'altro capo tenuto colla mano e tirato in una direzione costante con una forza sufficiente per l'appunto ad allungare il filo d'una data lunghezza; la forza che agisce sul corpo sarà allora di una data intensità F. Il corpo acquisterà una velocità, e alla fine di un'unità di tempo questa velocità avrà un certo valore V.

Se allo stesso filo vien legato un altro corpo N, e tirato come nel primo caso, sicchè l'allungamento sia lo stesso di prima, la forza che agisce sul corpo sarà la stessa, e se la velocità comunicata ad N in un'unità di tempo è pure la stessa, cioè V, diciamo allora che i due corpi M ed N constano di quantità eguali di materia, ossia, nel linguaggio moderno, che essi hanno eguali *masse*.

Così, mediante l'uso di un filo elastico, possiamo regolare le masse di un certo numero di corpi, per modo da essere ciascuno eguale al modulo di unità di massa. La massa del chilogrammo tipico è comunemente presa per modulo della massa unitaria.

46. *Misura della massa.* — Il valore scientifico del metodo dinamico di paragonare le quantità di materia meglio rilevasi comparandolo con altri metodi ora in uso.

Finchè si ha a fare con corpi esattamente della stessa specie, non torna difficile il comprendere in qual modo la quantità di materia debba misurarsi. Qualora eguali quantità della sostanza producono eguali effetti di qualsivoglia specie, possiamo adoperare questi effetti siccome misure della quantità di sostanza.

Se, ad esempio, si impiega dell'acido solforico di data concentrazione, potremo valutare la quantità di una data porzione di esso in parecchi modi differenti. Lo possiamo pesare, lo possiamo versare in un vaso graduato e misurarne poi il volume, ovvero possiamo determinare la quantità di una tipica soluzione di potassa, che essa varrà a neutralizzare.

Si può far uso degli stessi metodi per valutare una quantità di acido nitrico, ove si abbia a fare solo con esso. Ma, volendo invece confrontare una quantità di acido nitrico con una quantità di acido solforico, otterremmo dei risultati differenti, sia pesando, sia misurando il volume, sia valendoci di una soluzione alcalina.

Di questi tre metodi, quello del peso dipende dall'attrazione fra l'acido e la terra; quello della misura dipende dal volume che l'acido occupa, e il terzo dalla affinità di combinazione col potassio.

Nella dinamica astratta, del resto, la materia è considerata soltanto siccome ciò che può risentire una mutazione nel proprio moto per l'applicazione di una forza. Ne consegue che: due corpi qualsivogliano sono di egual massa ogniqualvolta forze eguali loro applicate producono, in tempi eguali, cambiamenti eguali di velocità. Questa è l'unica definizione di *masse eguali* che può ammettersi in dinamica, ed è applicabile a tutti i corpi materiali, di qualunque sostanza siano formati.

È un fatto osservato che i corpi di egual massa, posti nella medesima posizione relativa rispetto la terra, sono egualmente attratti verso di essa, di qualunque sostanza sieno. Ma questo non è un insegnamento della dinamica astratta, fondato su assiomi, sibbene un fatto scoperto dall'osservazione, e verificato dalle accurate esperienze di Newton, sulla durata di oscillazione di palle cave di legno, sospese a fili di egual lunghezza e contenenti oro, argento, piombo, vetro, sale comune, legno, acqua e grano. (1)

Il fatto, del resto, che nella medesima posizione geografica i pesi di masse eguali sono eguali, è sì ben stabilito che, sia nel commercio, sia nella scienza, non si usa altro metodo, per paragonare le masse, che quello di paragonare i loro pesi assoluti: eccettuatone soltanto il caso di ricerche intraprese nell'intento speciale di determinare, in misura assoluta, il peso della unità di masse nelle differenti parti della superficie terrestre.

Il metodo impiegato in queste ricerche è essenzialmente lo stesso di

(1) Già il Galileo era giunto a questa conclusione, sperimentando con due palle, l'una di piombo e l'altra di legno, di egual diametro, e sospese a fili d'eguale lunghezza.
G. C.

quello di Newton, e cioè, misurando la lunghezza di un pendolo che oscilla a secondi.

In Francia il tipo fondamentale dell'unità di massa è dato dal così detto *chilogrammo degli Archivi*, formato in platino, e che fu preparato da Borda. La millesima parte di questa massa è chiamata *Gramma*.

47. *Misura numerica di forza.* — L'unità di forza è quella forza, la quale, agendo sull' unità di massa per l' unità di tempo, genera l'unità di velocità.

Così il peso assoluto di un gramma può essere determinato col lasciarlo cadere liberamente. Al termine di un minuto secondo, la sua velocità sarà di circa 981 centimetri per secondo. Quindi il peso assoluto di un gramma è rappresentato dal numero 981, quando il centimetro, il gramma e il minuto secondo vengano presi come unità fondamentali.

Talvolta poi conviene confrontare le forze col peso di un corpo, e parlare di una forza di tanti grammi di peso; ciò che chiamasi misura di gravità. Dobbiamo per altro ricordare che, sebbene la massa di un gramma è la stessa in tutti i luoghi, il peso assoluto del gramma è maggiore nelle alte latitudini che non all' equatore, e quindi una misura di forza in misura di gravità non ha valore scientifico, se non si stabilisce in qual luogo venne presa tale misura.

Nel sistema metrico francese le unità essendo il centimetro, il gramma, ed un minuto secondo, la unità di forza è quella che comunica ad un gramma la velocità di un centimetro per secondo. Questa unità di forza è chiamata *piccolo dinamodo.*

48. *Azioni simultanee di più forze su di un corpo.* — Un' unità di forza agisca durante un'unità di tempo sopra un'unità di massa. La velocità della massa sarà cambiata, e l' accelerazione totale sarà l'unità nella direzione della forza.

La grandezza o direzione di questa accelerazione totale sarà la stessa, sia che in origine il corpo fosse in quiete o in moto. E infatti l' espressione " in quiete " non ha significato scientifico, e quella " in moto " se riferita a un moto relativo può averne uno qualunque, e se riferita a un movimento assoluto può riferirsi solo ad un mezzo, supposto fisso nello spazio. Lo scoprire l'esistenza di un tal mezzo, ed il determinare la nostra velocità rispetto ad esso, mediante l'osservazione del movimento di altri corpi, può credersi una legittima ricerca scientifica; ma per certo essa è ben lungi dall' essere fattibile, e costituirebbe un nuovo fatto nella scienza.

L'effetto quindi di una data forza su di un corpo non dipende dal moto di questo corpo.

E neppure è esso alterato dall' azione simultanea di altre forze sul

corpo. L'effetto di ognuna di queste forze sul corpo è infatti quello soltanto di produrre un dato moto nel corpo, e ciò non modifica l'accelerazione prodotta da ciascun' altra forza. [1]

Da ciò tutto si addiviene a quest'altra forma della legge: *Quando un qualsivoglia numero di forze agisce su di un corpo, l'accelerazione dovuta a ciascuna forza è la stessa in direzione e grandezza, come se le altre non avessero operato.*

Allorquando una forza, costante in direzione e grandezza, agisce su di un corpo, l'accelerazione totale è proporzionale all'intervallo di tempo durante il quale la forza agisce.

Se la forza infatti produce una certa accelerazione totale in un dato intervallo di tempo, essa ne produrrà un'eguale nel successivo, giacchè l'effetto della forza non dipende dalla velocità che ha il corpo quando la forza agisce su di esso. Ne segue che, in ogni intervallo di tempo, vi sarà un'eguale variazione di velocità, e la totale variazione di velocità, dal principio del movimento, sarà proporzionale alla durata d'azione della forza.

L'accelerazione totale in un dato tempo è proporzionale alla forza.

E infatti, se parecchie forze agiscono nella stessa direzione sullo stesso corpo, ciascuna produce il proprio effetto, indipendentemente dalle altre. L'accelerazione totale quindi è proporzionale al numero delle forze eguali.

49. *Impulso.* — L'effetto totale di una forza nel comunicare velocità ad un corpo, è quindi proporzionale alla forza e al tempo durante il quale essa agisce in modo continuo.

Il prodotto della durata d'azione di una forza per la sua intensità, se costante, o per la sua intensità media, se variabile, è detto l'*impulso* della forza.

Havvi certi casi in cui una forza agisce per tempo sì breve che riesce difficile il valutarne sia l'intensità, sia il tempo durante il quale agisce. Ma torna relativamente facile il misurare l'effetto della forza, coll'alterare il movimento del corpo su cui agisce: il che, come vedemmo, dipende dall'impulso.

La parola impulso fu primamente adoperata ad indicare l'effetto di una forza di breve durata, come quella di un martello che colpisce un chiodo. Non v'ha però differenza essenziale fra questo caso e qualsivoglia altra azione di forza. Useremo quindi la parola impulso come

---

(1) Questo, all'incirca, è il significato del principio della indipendente coesistenza di più movimenti in un punto mobile, quale fu enunciato primamente da Galileo, ed ampiamente svolto dal Mossotti. G. C.

si definì più sopra, senza restringerla ai casi in cui l'azione è di carattere eccezionalmente breve.

50. *Relazione tra forza e massa.* — Se una forza agisce sull'unità di massa per un certo intervallo di tempo, l'impulso, come vedemmo, è misurato dalla velocità prodotta.

Se un numero di forze eguali agisce nella stessa direzione, ciascuna sopra un' unità di massa, le diverse masse si muoveranno tutte nella stessa maniera, e potranno essere riunite assieme in un corpo, senza alterare il fenomeno. La velocità dell'intero corpo è allora eguale a quella prodotta da una delle forze che agiscono su di un'unità di massa.

Quindi la forza richiesta a produrre una data variazione di velocità in un dato tempo, è proporzionale al numero delle unità di massa di cui consta il corpo.

51. *Momento.* — Il valore numerico del *momento* di un corpo è il prodotto del numero delle unità di massa del corpo, per quello delle unità di velocità con cui si muove.

Il momento di un corpo è così misurato in relazione al momento dell'unità di massa che si muove coll'unità di velocità, il quale è preso come unità di momento.

La direzione del momento è la stessa di quella della velocità, e siccome la velocità può valutarsi soltanto rispetto a qualche punto di riferimento, così la valutazione particolare del momento dipende dal punto di riferimento che assumiamo. Il momento della luna, a cagion d'esempio, sarà ben differente, secondochè prendiamo il sole o la terra quale punto di riferimento.

52. *La seconda legge del moto, espressa con riguardo all' impulso ed al momento. — La variazione nel momento di un corpo è numericamente eguale all'impulso che lo produce, ed è nella stessa direzione.*

53. *Addizione delle forze.* — Se un numero qualunque di forze agisce simultaneamente su di un corpo, ciascuna forza produce un'accelerazione proporzionale alla propria grandezza (§ 46). Quindi, se nel diagramma delle accelerazioni (§ 34) conduciamo dall'origine una linea che rappresenti, in direzione e grandezza, l' acelerazione dovuta ad una delle forze, e dall' estremità di questa linea ne tiriamo un' altra che rappresenti l' accelerazione dovuta ad un'altra forza, e così via, conducendo le linee per ciascuna delle forze, prese in qualunque ordine, allora la linea condotta dall'origine all'estremo libero dell'ultima di esse, rappresenterà l'accelerazione dovuta all'azione combinata di tutte le forze.[1]

---

(1) È questa appunto la costruzione grafica, seguita già da Galileo e da Mossotti, per risolvere, nella sua generalità e con elegante semplicità, il problema della composizione di un numero qualunque di movimenti, e per determinare le rispettive condizioni di equilibrio. G. C.

Poichè in questo diagramma le linee, che rappresentano le accelerazioni, sono nella stessa proporzione delle forze a cui queste accelerazioni sono dovute, così possiamo considerare le linee siccome rappresentatrici delle forze stesse. Il diagramma, inteso di tal modo, può chiamarsi il *diagramma delle forze*, e la linea condotta dall'origine all'estremità della serie rappresenta la *forza risultante*.

Un caso importante è quello in cui la serie di linee rappresentatrici delle forze viene a cadere nel punto stesso d'origine, in modo da formare una figura chiusa. In questo caso non v'ha nè forza risultante, nè accelerazione. Gli effetti delle forze sono esattamente controbilanciati: e questo è il caso dell'*equilibrio*. La discussione dei casi di equilibrio forma il soggetto della Statica.

È manifesto che quando il sistema delle forze è esattamente controbilanciato, e non vi è forza risultante, le forze medesime saranno del pari equilibrate, ancor quando agissero, nello stesso modo, su di un altro sistema materiale, cioè qualunque sia la massa di questo sistema.

Ed ecco la ragione per cui la considerazione della massa non entra nelle investigazioni statiche.

54. *La terza legge del moto. — La reazione è sempre eguale ed opposta all'azione: vale a dire, le azioni di due corpi l'uno verso l'altro sono sempre eguali e in direzione contraria.*

Allorquando i corpi fra i quali ha luogo l'azione non sono sollecitati da alcun'altra forza, i cangiamenti nei loro rispettivi momenti, prodotti dall'azione, sono eguali e in direzioni opposte.

Le variazioni nella velocità dei due corpi moventisi con opposta direzione riescono eguali solo nel caso in cui le loro masse sieno eguali. Negli altri casi le variazioni di velocità sono in ragione inversa delle masse.

55. *Azione e reazione sono aspetti parziali di uno sforzo.* — Abbiamo già adoperato la parola sforzo (§ 37) per indicare la mutua azione fra due porzioni di materia. Questa parola venne tolta a prestito dal linguaggio comune, e dotata di un significato preciso dal Rankine, al quale andiamo debitori di parecchi altri preziosi vocaboli scientifici.

Non appena ci siamo formati l'idea di uno sforzo, come la tensione di una corda o la pressione fra due corpi, ed abbiamo riconosciuto il duplice aspetto secondo cui esso modifica le due porzioni di materia fra le quali agisce, si vede tosto che la terza legge del moto corrisponde allo stabilire: che ogni forza è della stessa natura di uno sforzo; che non può esistere sforzo se non fra due porzioni di materia, e che

i suoi effetti su di esse (misurati dal momento prodotto in un tempo dato) sono eguali e contrari.

Lo sforzo è numericamente misurato dalla forza esercitata sull'una o l'altra delle due porzioni di materia. Esso viene distinto come una tensione quando la forza che agisce sull'una delle due porzioni la sollecita verso l'altra, e come una pressione quando essa operi per respingerla.

Quando la forza è inclinata alla superficie che separa le due porzioni di materia, lo sforzo non può altrimenti assegnarsi nel linguaggio ordinario, ma deve essere definito in termini matematici.

Se si esercita una tensione fra due corpi col mezzo di una fune, lo sforzo, propriamente parlando, si esercita fra due parti qualunque in cui supponesi divisa la fune da una sezione immaginaria, o fra due sue facce trasversali. Se però trascuriamo il peso della fune, ciascuna porzione di essa è in equilibrio sotto l'azione delle tensioni alle sue estremità, per modo che le tensioni fra due sezioni qualunque trasversali di essa devono essere eguali. Per questa ragione noi parliamo spesso di tensione di una fune come di un tutto, senza specificare una particolare sezione, e così della tensione fra due corpi, senza considerare la natura del legame attraverso il quale la tensione viene esercitata.

56. *Attrazione e ripulsione.* — Vi sono altri casi nei quali due corpi a distanza sembrano mutuamente agire l'un sull'altro, sebbene non si possa scoprire alcun mezzo, traverso a cui esercitasi l'azione.

Così due magneti, o due corpi elettrizzati, sembrano agire l'un sull'altro, quando son posti anche a notevole distanza tra loro, e così fu osservato che i movimenti dei corpi celesti sono influenzati in un modo dipendente dalla loro posizione relativa.

Questa mutua azione fra corpi distanti è chiamata *attrazione* quando tende ad avvicinarli, e *ripulsione* quando tende a discostarli.

In tutti i casi però l'azione e la reazione fra i corpi sono eguali e contrarie fra di loro.

57. *La terza legge verificasi nell'azione a distanza.* — Il fatto che un magnete attira il ferro venne osservato dagli antichi, ma non si prestò attenzione alcuna alla forza con cui il ferro attrae il magnete. Però Newton, ponendo il magnete in un vaso e il ferro in un altro, e facendo galleggiare i due vasi sull'acqua in modo che si toccassero, dimostrò sperimentalmente che nessuno dei due vasi era capace di spingere l'altro lungi da sè stesso traverso l'acqua. Perciò l'attrazione del ferro sul magnete doveva essere eguale e contraria a quella del magnete sul ferro, essendo eguali entrambe alla mutua pressione esercitantesi fra i due vasi.

Dietro questa illustrazione sperimentale, Newton rileva a che condurrebbe il negare la verità astratta di questa legge. Se l'attrazione, per esempio, di una parte qualsivoglia della terra, come una montagna, sul rimanente della terra fosse maggiore o minore che quella della restante terra sulla montagna, vi sarebbe una forza residua, la quale agirebbe sul sistema della terra e della montagna come un tutto, e l'obbligherebbe a muoversi, con velocità sempre crescente, attraverso l'infinito spazio.

58. *La prova di Newton non è sperimentale.* — La precedente asserzione di Newton è contraria alla prima legge del moto, la quale afferma che un corpo non cambia il proprio stato di moto, a meno che sia sollecitato da una forza *esterna*. E questo non può asserirsi contrario all'esperienza, perchè l'effetto di una ineguaglianza fra l'attrazione della terra sulla montagna e della montagna sulla terra, sarebbe la stessa di quella di una forza, eguale alla differenza di queste attrazioni ed agente in direzione della linea che congiunge il centro della terra con quello della montagna.

Ove la montagna fosse all'equatore, la terra dovrebbe ruotare intorno ad un asse, parallelo a quello intorno al quale altrimenti ruoterebbe, ma non passerebbe pel centro di massa della terra.

Qualora la montagna si trovasse all'uno dei poli, la forza costante, parallela all'asse della terra, farebbe sì che l'orbita di questa attorno al sole sarebbe lievemente trasportata al nord od al sud di un piano passante attraverso il centro della massa del sole.

Se infine la montagna fosse posta in qualunque altra parte della superficie della terra, l'effetto sarebbe in parte secondo l'uno dei modi indicati e in parte secondo l'altro.

Nè l'uno nè l'altro di questi effetti, a meno che assai grandi, potrebbero scoprirsi mediante osservazioni astronomiche dirette, e il metodo indiretto di scoprire piccole forze, mediante i loro effetti nelle lievi alterazioni degli elementi dell'orbita di un pianeta, presuppone che la legge di gravitazione si riconosca per vera. Il dimostrare le leggi del moto mediante la legge di gravitazione sarebbe una inversione dell'ordine scientifico. Tanto varrebbe quanto il dimostrare le leggi dell'addizione dei numeri ricorrendo al calcolo differenziale.

Non possiamo quindi riguardare la supposizione di Newton come un richiamo all'esperienza e all'osservazione, ma piuttosto come una deduzione della terza legge del moto dalla prima.

CAPITOLO IV.

Proprietà del centro di massa di un sistema materiale.

59. *Definizione di vettore-massa.* — Abbiamo veduto che un vettore rappresenta l'atto del trasportare un punto di traccia da una data origine ad un dato punto.

Ora possiam definire un *vettore-massa,* siccome l'operazione del portare una data massa dall'origine ad un punto dato. La direzione del vettore-massa è la stessa di quella del vettore della massa, ma la grandezza del primo è il prodotto della massa pel vettore della massa.

Così se $\overline{OA}$ è il vettore della massa A, $\overline{OA}.A$ sarà il corrispondente vettore-massa.

60. *Centro di massa di due particelle.* — Se A e B sono due masse,

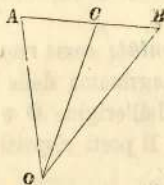



Fig. 7.

e se un punto C sia preso sulla retta AB, per modo che $\overline{BC}$ stia a $\overline{CA}$ come A a B, allora il vettore-massa d'una massa A + B, posta in C, è eguale alla somma dei vettori-massa di A e B. Infatti:

$$\overline{OA}.A + \overline{OB}.B = (\overline{OC} + \overline{CA})A + (\overline{OC} + \overline{CB})B$$
$$= \overline{OC}(A + B) + \overline{CA}.A + \overline{CB}.B$$

Ora i vettori-massa $\overline{CA}.A$ e $\overline{CB}.B$ sono eguali e contrarii, sicchè annullansi l'un l'altro, per modo che $\overline{OA}.A + \overline{OB}.B = OC(A + B)$, ovvero C è un tal punto che se le masse di A e di B fossero in esso concentrate, i loro vettori-massa da un'origine qualsivoglia O, sarebbero gli stessi come allorquando A e B sono nelle loro posizioni attuali. Il punto C dicesi il *centro di massa* di A e B.

61. *Centro di massa di un sistema.* — Se il sistema consta di un numero qualsivoglia di particelle, possiamo incominciare col trovare il centro di massa di due particelle qualunque, e sostituire loro una particella eguale alla loro somma, e posta nel loro centro di massa. Potremo poi trovare il centro di massa di questa particella con una terza particella

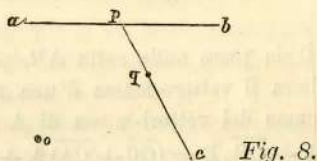
del sistema, sostituire la somma di queste tre particelle in quel punto; e così via, finchè abbiamo trovato il centro di massa di tutto il sistema.

Il vettore-massa condotto da un'origine qualunque ad una massa, eguale a quella dell'intero sistema posto nel centro di massa del sistema, è eguale alla somma dei vettori-massa, condotti dalla stessa origine a tutte le particelle del sistema.

Ne segue, giusta la seconda dimostrazione veduta sopra (§ 60), che il punto trovato colla costruzione suindicata soddisfa a questa condizione, dalla quale risulta pure non esservi che un sol punto che possa soddisfarvi. La costruzione pertanto deve guidare al medesimo risultato, quanto alla posizione del centro di massa, qualunque sia l'ordine in cui vengono prese le particelle del sistema.

Il *centro di massa* è quindi un punto definito nel diagramma di figura del sistema. Se nei diagrammi di spostamento, di velocità, di accelerazione totale e di ragione dell'accelerazione, si assegnano ai differenti punti le masse dei corpi ai quali essi corrispondono, possiamo trovare in ciascuno di questi diagrammi, un punto che corrisponde al centro di massa, e che indica lo spostamento, la velocità, l'accelerazione totale del centro di massa.

62. *Il momento rappresentato come ragione della variazione di un vettore-massa.* — Se nel diagramma delle velocità i punti o, a, b, c, corrispondono alle velocità dell'origine O e dei corpi A, B, C, e se p è il centro di massa di A e B posti rispettivamente in a e b, e se q è

Fig. 8.

il centro di massa di A + B posto in p e dalla massa di C collocata in c, allora sarà q il centro di massa del sistema dei corpi A, B, C, animati rispettivamente dalle velocità oa, ob, oc.

La velocità di A rispetto ad O è indicata dal vettore $\overline{oa}$, e quella di B e di C da $\overline{ob}$ ed $\overline{oc}$. La velocità del centro di massa di A e B è $\overline{op}$, ed $\overline{oq}$ quella del centro di massa di A, B e C rispetto ad O.

Il momento di A rispetto ad O è il prodotto della velocità per la massa, cioè $\overline{oa}.A$, ossia ciò che abbiamo già chiamato vettore-massa, condotto da o alla massa A in a. Similmente il momento di un altro corpo è il vettore-massa condotto da o al punto del diagramma delle velocità corrispondenti a questo corpo, e il momento della massa del

sistema, concentrato al centro di massa, è il vettore-massa condotto da o alla intera massa posta in q.

Ora, poichè un vettore-massa nel diagramma delle velocità corrisponde a quanto poc'anzi definimmo per *momento,* si potrà esprimere la proprietà dimostrata poc'anzi (§ 61) mediante i momenti, in questo modo. Il momento di una massa, eguale a quella dell'intero sistema, che si muova colla velocità del centro di massa del sistema medesimo, è eguale in grandezza e parallelo in direzione alla somma dei momenti di tutte le particelle del sistema.

63. *Effetto di forze esterne sul movimento del centro di massa.* — Similmente nel diagramma della accelerazione totale i vettori $\overline{\omega\alpha}$, $\overline{\omega\beta}$, condotti dall'origine, rappresentano la variazione della velocità dei corpi A, B, ecc., durante un dato intervallo di tempo. I corrispondenti vettori-massa $\overline{\omega\alpha}\,.\,A$, $\overline{\omega\beta}\,.\,B$, ecc., rappresentano le corrispondenti variazioni del momento; ossia, giusta la seconda legge del moto, gli impulsi delle forze agenti su questi corpi durante il detto intervallo di

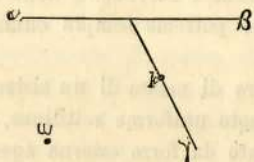



Fig. 9.

tempo. Se k è il centro di massa del sistema, $\overline{\omega k}$ è la variazione di velocità durante l'intervallo, e $\overline{\omega k}$ (A + B + C) è il momento generato nella massa concentrata al centro di gravità. Quindi (§ 61), la variazione nel momento della massa immaginaria, eguale a quella dell'intero sistema concentrato nel centro di massa, sarà eguale alla somma delle variazioni del momento di tutti i differenti corpi del sistema.

In virtù della seconda legge del moto possiamo esprimere questo risultato nel modo seguente:

L'effetto delle forze che agiscono sui differenti corpi del sistema nell'alterare il movimento del centro di massa di esso, è lo stesso come se tutte queste forze fossero state applicate ad una massa eguale all'intera massa del sistema, e coincidente col suo centro di massa.

64. *Il movimento del centro di massa di un sistema non è modificato dalla mutua azione delle parti del sistema.* — Infatti, se vi è un'azione fra due parti del sistema, come A e B, l'azione di A su B è sempre, giusta la terza legge del moto, eguale e opposta alla reazione di B su di A. Il momento generato in B dall'azione di A, durante un intervallo qualsivoglia, è quindi eguale ed opposto a quello generato

in A dalla reazione di B durante lo stesso intervallo, e il movimento del centro di massa di A e di B non è quindi alterato dalla loro mutua azione.

Possiamo applicare il risultato del paragrafo 63 a questo caso, e dire che: poichè le forze su A e su B, causate dalla loro reciproca azione, sono eguali ed opposte; poichè l'effetto di queste forze sul movimento del centro di massa del sistema è lo stesso come se fossero state applicate a una particella la di cui massa fosse eguale all'intera massa del sistema, e poichè la risultante di due forze eguali ed opposte l'una all'altra riesce nulla, così il movimento del centro di massa non ne rimane modificato.

65. *Prima e seconda legge del moto.* — Questo è un importantissimo risultato, e ci permette di rendere più preciso l'enunciato della prima e della seconda legge del moto, col definire che la velocità di un corpo è data dalla velocità del suo centro di massa. Il corpo può essere in atto di rotazione, o può consistere di parti ed essere capace di mutare di figura, sicchè i movimenti delle diverse parti sieno differenti: e pur nondimeno potremo sempre enunciare le leggi del moto nel modo seguente:

Legge I. — Il centro di massa di un sistema persevera nel proprio stato di quiete, o di moto uniforme rettilineo, sino a quando gli venga fatto mutare questo stato da forze esterne agenti sul sistema.

Legge II. — Il cambiamento nel momento di un sistema durante un intervallo di tempo è misurato dalla somma degli impulsi delle forze esterne durante questo intervallo.

66. *Metodo di considerare i sistemi di molecole.* — Quando un sistema consta di parti così piccole, che non si possono osservare, e i di cui movimenti sono così rapidi e variabili, che se anche fossero osservabili, non li potremmo calcolare, basterà sempre considerare il movimento del centro di massa del sistema: poichè le forze interne che determinano la variazione nel moto delle parti non influiscono sul movimento del centro di massa.

67. *Coll' introduzione del concetto di massa si passa dai vettori di punti, spostamenti di punti, velocità, accelerazioni totali, e ragione di accelerazione, ai vettori di massa, spostamento di massa, momenti, impulsi e forze motrici.* — Nel diagramma delle ragioni di accelerazione (Fig. 9, § 63) i vettori $\overline{\alpha\omega}$, $\overline{\omega\beta}$, ecc., condotti dall'origine, rappresentano le ragioni di accelerazione dei corpi A, B, ecc., in un dato istante, rispetto a quello dell'origine O.

I corrispondenti vettori-massa $\overline{\omega\alpha}$. A, $\overline{\omega\beta}$. B, ecc., rappresentano le forze agenti sui corpi A, B, ecc.

Talvolta noi parliamo di parecchie forze agenti su di un corpo, quando la forza che su di esso agisce sorge da parecchie cause diverse, sicchè natura lmenteconsideriamo separatamente la parte di forza originata da ciascuna di queste cause.

Ma quando consideriamo la forza, non rispetto alle sue cause, ma rispetto al suo effetto — quello di alterare il movimento di un corpo — non parliamo di forze, sibbene della forza che agisce sul corpo, e questa forza è misurata dalla ragione della variazione del momento del corpo, ed è indicata dal vettore-massa nel diagramma della ragione di accelerazione.

Si ha così una serie di differenti specie di vettori-massa, corrispondenti alla serie di vettori, de' quali già trattammo altrove. (Cap. II).

Abbiamo, in primo luogo, un sistema di vettori-massa con una origine comune, che possiamo riguardare siccome un modo di indicare la distribuzione delle masse in un sistema materiale, appunto come il corrispondente sistema di vettori indica la figura geometrica del sistema.

In secondo luogo, col paragonare la distribuzione della massa a due epoche differenti, otteniamo un sistema di vettori-massa di spostamento.

La ragione dello spostamento di massa sta al momento, appunto come la ragione dello spostamento sta alla velocità.

La variazione del momento sta all'impulso, come la variazione della velocità sta all'accelerazione totale.

La variazione del momento sta alla forza motrice, come la variazione nella velocità sta all'accelerazione.

68. *Definizione di un'area-massa.* — Quando una particella materiale si muove da un punto ad un altro, il doppio dell'area descritta dal vettore della particella, moltiplicato per la massa diversa, chiamasi l'*area-massa* dello spostamento della particella rispetto all'origine da cui è condotto il vettore.

Se l'area è in un piano, la direzione dell'area-massa è normale al piano e condotta per modo che, guardando lungo la normale nel senso della direzione positiva, il movimento delle particelle attorno ad essa area corrisponde alla direzione del movimento delle lancette di un orologio.

Se l'area è in un piano, il percorso dalla particella deve essere diviso in porzioni sì piccole che ciascuna coincida sensibilmente con una linea retta, e le aree-massa corrispondenti a queste singole porzioni devono essere sommate assieme, colla regola dell'addizione dei vettori.

69. *Momento angolare.* — La misura della variazione di un'area-massa è il doppio del prodotto della massa della particella pel triangolo, il cui vertice sta nell'origine e la cui base esprime la velocità della particella misurata lungo la linea rappresentativa della direzione

del movimento della particella. La direzione dell'area-massa è indicata dalla normale, condotta secondo la regola suaccennata.

La misura della variazione dell'area-massa di una particella è chiamata il *momento angolare* della particella intorno all'origine, e la somma dei momenti angolari di tutte le particelle è detto il momento angolare del sistema intorno l'origine.

Il momento angolare di un sistema materiale rispetto ad un punto è quindi una quantità che ha una direzione e grandezza definite.

La definizione del momento angolare di una particella attorno ad un punto può essere espressa un po' differentemente, siccome il prodotto del momento della particella rispetto a questo punto per la perpendicolare condotta dal punto stesso alla linea di movimento della particella in quell'istante.

70. *Momento di una forza intorno ad un punto.* — La ragione dell'incremento del momento angolare di una particella è il prodotto continuato della ragione di accelerazione della velocità di essa per la massa e per la perpendicolare condotta dall'origine sulla linea secondo la quale si effettua l'accelerazione. In altre parole, esso è il prodotto della forza motrice che agisce sulla particella per la perpendicolare condotta dall'origine sulla linea d'azione di questa forza.

Ora il prodotto di una forza per la perpendicolare condotta dall'origine sulla sua linea d'azione vien detto il *momento* della forza *intorno l'origine.* L'asse del momento che indica la sua direzione è un vettore condotto perpendicolarmente al piano che passa per la forza e l'origine, ed in direzione tale che, guardando lungo questa linea nella direzione in cui è condotta, la forza tende a muovere la particella attorno l'origine nella direzione delle lancette di un orologio.

La ragione quindi della variazione del momento angolare di una particella attorno l'origine è misurata dal momento della forza che agisce sulla particella intorno a questo punto.

La ragione della variazione del momento angolare di un sistema materiale attorno l'origine è similmente misurata dalla somma geometrica dei momenti delle forze che agiscono sulle particelle del sistema.

71. *Conservazione del momento angolare.* — Consideriamo ora due particelle del sistema. Le forze che agiscono su queste due particelle determinate dalla loro reciproca azione, sono eguali, opposte e sulla medesima retta. I momenti quindi di queste forze attorno ad un punto qualunque, quale origine, sono eguali, opposte ed intorno allo stesso asse, e la loro somma è pertanto zero. Similmente la mutua azione fra ciascun' altra coppia di particelle nel sistema consta di due forze, la somma dei cui momenti sarà pur zero.

La reciproca azione quindi fra i corpi di un sistema materiale non influisce su la somma geometrica dei momenti delle forze. Pertanto le sole forze, che bisogna considerare nel trovare la somma geometrica dei momenti, sono quelle esterne al sistema, vale a dire, fra il tutto o una parte qualsivoglia del sistema e i corpi non inclusi in esso.

La ragione della variazione del momento angolare del sistema è quindi misurata dalla somma geometrica dei momenti delle forze esterne che agiscono su di esso.

Se la direzione di tutte le forze esterne passa attraverso l'origine, i loro momenti sono zero, e il momento angolare del sistema rimarrà costante.

Quando un pianeta descrive un'orbita attorno al sole, la direzione della reciproca azione fra i due corpi passa sempre pel loro centro di massa. Quindi il momento angolare di entrambi i corpi attorno al comune centro di massa rimane costante, in quanto riflette unicamente questi due corpi, sebbene possa essere affetto dall'azione di altri pianeti. Se, del resto, noi includiamo nel sistema tutti i pianeti, la somma geometrica dei loro momenti angolari attorno al loro centro comune di massa rimarrà assolutamente costante, qualunque possano essere le loro mutue azioni, purchè nessuna forza causata da corpi esterni all'intero sistema solare agisca in modo diseguale sui differenti membri del sistema.

CAPITOLO V.

Energia e Lavoro.

72. *Definizioni.* — *Dicesi* Lavoro *l'atto di produrre un cambiamento di figura in un sistema, in opposizione a date forze interne, che resistono a questo cambiamento.*

Energia *è l'attitudine a compiere un lavoro.*

Quando la natura di un sistema materiale è tale che, dopo di aver subito una serie di variazioni, il sistema stesso vien riportato, in qualsivoglia modo, al suo stato originario, e quando l'intero lavoro, fatto da azioni esterne sul sistema, riesce eguale al totale lavoro

fatto dal sistema nel vincere queste forze esterne, allora questo sistema chiamasi un sistema conservativo.

73. *Principio della conservazione dell'energia.* — Il progresso della scienza fisica guidò alla scoperta ed illustrazione di diverse forme di energia, e giunse a stabilire la dottrina: che ogni sistema materiale può riguardarsi come un sistema conservativo; purchè venga tenuto calcolo di tutte le diverse forme di energia che esistono in esso.

Ove questa dottrina la si considerasse siccome una deduzione dall'osservazione e dall'esperienza, verrebbe solo ad affermare che finora non si scoprì esempio alcuno di sistema non conservativo.

Guardandola invece come dottrina scientifica o razionale, essa acquista una credibilità sempre maggiore pel numero, di continuo crescente, delle deduzioni che se ne trassero, e che in ogni caso si trovarono verificate all'esperienza.

In fatto la dottrina della conservazione dell'energia è il solo principio, veramente generale, che si riscontri fondato in ogni fenomeno, non solo della fisica, ma pur di tutte l'altre scienze naturali.

Una volta intesa, essa porge all'acuto indagatore un principio, da cui può far dipendere ogni legge conosciuta riferentesi alle azioni fisiche, e col quale può mettersi in grado di scoprire le relazioni di questa azione in nuovi rami di scienza.

Per questi motivi la dottrina viene chiamata comunemente il *principio della conservazione dell'energia.*

74. *Esposizione generale del principio della conservazione dell'energia* — *L'energia totale di qualunque sistema materiale è una quantità, che non può essere nè aumentata, nè diminuita da qualsivoglia azione fra le parti del sistema, sebbene venga trasformata in una qualsiasi delle forme di cui l'energia è suscettibile.*

Se, per l'azione di qualche agente esterno al sistema, la figura di questo è cambiata, mentre le forze di esso reagiscono a tale cambiamento di figura, si dice che l'agente esterno produce un lavoro nel sistema. In questo caso l'energia del sistema è cresciuta dall'aumento di lavoro con ciò in esso prodotto.

Se, al contrario, le forze del sistema producono una variazione di figura a cui resiste l'agente esterno, si dice che il sistema produce un lavoro sull'agente esterno, e l'energia del sistema è diminuita di una quantità corrispondente a questo lavoro.

Un lavoro, dunque, *si risolve in un trasporto di energia da uno ad altro sistema.*

Il sistema che estrinseca l'energia si dice che opera su quello che

la riceve, e la quantità di energia estrinsecata dal primo è sempre esattamente eguale a quella ricevuta dal secondo.

Se pertanto si includono entrambi i sistemi in un unico sistema maggiore, l'energia del sistema totale non è nè aumentata, nè diminuita da una variazione parziale, prodotta dall'un sistema sull' altro.

75. *Misura del lavoro.* — Il lavoro fatto da un agente esterno su un sistema materiale può essere indicato come una variazione nella figura del sistema, effettuantesi per opera di una forza esterna, che tende a produrla.

Così se un uomo, in opposizione all'azione della gravità, solleva un chilogramma all' altezza di un metro dal terreno, una data quantità di lavoro è da esso prodotta, e questa quantità è chiamata dagli ingegneri col nome di *chilogrammetro.*

Qui l'agente esterno è l'uomo, il sistema materiale consta della terra e del peso sollevato, il cambiamento di figura è l' aumento della distanza fra la materia della terra e quella del chilogramma, e la forza è lo sforzo da basso in su esercitato dall' uomo nel sollevare il chilogramma, il quale sforzo è eguale ed opposto al peso del chilogramma.

A sollevare il chilogramma di un altro metro si richiederebbe, se la gravità fosse una forza uniforme, esattamente la stessa quantità di lavoro.

Però la gravità non è realmente uniforme, ma va diminuendo man mano ascendiamo dalla superficie terrestre, talchè un chilogrammetro non è propriamente una quantità determinata, a meno che venga specificata l' intensità della gravità nel luogo.

Tuttavia, nelle comuni applicazioni, possiamo assumere che l'accelerazione di gravità non varii sensibilmente per pochi metri di ascesa. In tal caso il lavoro fatto nel sollevare un chilogramma equivale ad un chilogrammetro per ogni metro cui esso viene sollevato.

Così a sollevare venti chilogrammi d'acqua all'altezza di dieci metri richiedonsi 200 chilogrammetri di lavoro, perchè a sollevare un chilogramma a dieci metri d'altezza vogliousi dieci chilogrammetri, e siccome qui abbiamo venti chilogrammi, l' intero lavoro sarà venti volte maggiore, e cioè duecento chilogrammetri.

La *quantità di lavoro* fatto è quindi proporzionale al prodotto dei numeri che rappresentano la forza esercitata, e lo spostamento occorso nella stessa direzione della forza.

Nel caso di un chilogrammetro la forza è il peso assoluto di un chilogramma, quantità che sappiamo esser diversa nei diversi luoghi. Il peso di un chilogramma espresso in misura assoluta, cioè riferito all' unità di massa, è numericamente eguale all' intensità della gravità,

la quale quantità si dinota con g, e il cui valore in chilogrammetri, riferiti al chilogramma, varia da 9,781 a 9,831 dall'equatore al polo; e diminuisce illimitatamente quanto più ci allontaniamo dalla terra.

Ad esprimere pertanto il lavoro in un modo uniforme e costante, devesi moltiplicare il numero dei chilogrammetri pel numero che rappresenta l'intensità della accelerazione di gravità nel luogo. Il lavoro è per tal modo ridotto a *dinamodi.*

Riterremo sempre che il lavoro sia misurato in questo modo, e calcolato in dinamodi, ogni qualvolta non si faccia menzione di altro sistema di misura. Quando un lavoro è espresso in chilogrammetri, si segue il sistema delle *misure di gravità,* il quale non è un sistema completo, a meno che si conosca anche l'intensità della gravità in luogo.

76. *Energia potenziale.* — Il lavoro fatto da un uomo nel sollevare un corpo pesante corrisponde al vincere l'attrazione fra la terra e questo corpo. L'energia del sistema materiale, che consta della terra e del corpo pesante, è con ciò aumentata.

Poniamo che il corpo pesante sia il peso motore d'un orologio a pendolo: l'energia di questo vien aumentata dallo sforzo di discesa di quello. Di talchè l'orologio potrà continuare ad agire per una settimana, non ostante lo sfregamento delle ruote e la resistenza dell'aria al movimento del pendolo, ed estrinsecare così dell'energia sotto altre forme, tra le quali quella del comunicare le vibrazioni all'aria, pel cui mezzo noi udiamo le oscillazioni del pendolo.

Allorquando si carica un orologio da tasca, si produce un lavoro nel cambiare la forma della molla principale, coll'avvolgerla. L'energia tensiva di questa viene con ciò aumentata, per modo che, svolgendosi, riesce capace di tenere in movimento l'oriuolo.

In entrambi questi casi l'energia comunicata al sistema dipende da un cambiamento di figura.

77. *Energia cinetica.* — Ma in una classe importantissima di fenomeni il lavoro consiste nel cambiare la velocità del corpo in cui si effettuano. Consideriamo, come un caso semplice, quello di un corpo che sotto l'azione di una forza si muove senza rotare.

Sia M la massa del corpo, e la forza F agisca su di esso nella linea del movimento, durante un intervallo T di secondi. Sia al principio dell'intervallo V la velocità, e V′ quella alla fine, ed S la distanza percorsa dal corpo in tale durata. Il momento in origine è M V, quello finale M V′: cosicchè l'incremento di momento è $M(V' - V)$, e questo, giusta la seconda legge del moto (§ 65), è eguale ad FT, impulso della forza F, che agisce pel tempo T. Quindi

$$FT = M(V' - V). \qquad (1)$$

Poichè la velocità cresce uniformemente col tempo, la velocità media è la media aritmetica della velocità iniziale e finale, ovvero $1/2\,(V'+V)$.

Possiamo adunque determinare la velocità media col dividere lo spazio S pel tempo T, durante il quale fu descritto. Quindi

$$\frac{S}{T}=\frac{1}{2}(V'+V). \qquad (2)$$

Moltiplicando membro a membro le equazioni (1) e (2) otteniamo:

$$FS=\frac{1}{2}MV'^2-\frac{1}{2}MV^2$$

Qui FS è il lavoro fatto dalla forza F che agisce sul corpo, mentre esso si muove attraverso lo spazio S nella direzione della forza, ed è eguale all'eccesso di $\frac{1}{2}MV'^2$ rispetto a $\frac{1}{2}MV^2$. Se $\frac{1}{2}MV^2$, ovvero la metà del prodotto della massa pel quadrato della velocità, la chiamiamo l'*energia cinetica* del corpo in origine, sarà $\frac{1}{2}MV'^2$ l'energia cinetica dopo l'azione della forza F attraverso lo spazio S.

Possiamo ora esprimere l'equazione in parola dicendo: che il lavoro fatto dalla forza F nel cambiare il movimento del corpo è misurata dall'incremento dell'energia cinetica del corpo durante il tempo che questa forza agisce.

Si è già veduto (§ 31) che questo è vero quando l'intervallo di tempo è così piccolo da poter considerarsi la forza come costante durante questo tempo, e la velocità media durante l'intervallo come la media aritmetica delle velocità al principio e alla fine dell'intervallo. Questo supposto, esattamente vero quando la forza è costante, comunque possa essere lungo l'intervallo, diventa in ogni caso sempre più prossimo al vero, quanto più e più piccolo diventi l'intervallo di tempo preso.

Col dividere l'intero tempo dell'azione in piccole parti, e col provare che in ciascuna di esse il lavoro fatto è eguale all'incremento dell'energia cinetica del corpo, noi possiamo, addizionando le successive porzioni di lavoro ed i successivi incrementi di energia, arrivare al risultato: che il lavoro totale fatto dalla forza è eguale all'incremento totale di energia cinetica.

Se la forza agisce sul corpo in direzione opposta al suo moto, l'energia cinetica del corpo sarà diminuita, a vece che aumentata, e la forza, invece di fare lavoro sul corpo, agirà come una resistenza, che il corpo vince nel proprio movimento. Quindi un corpo moventesi, fintanto che

è in moto, può fare lavoro nel vincere una resistenza, e il lavoro fatto dal corpo moventesi è eguale alla diminuzione della sua energia cinetica; sinchè alla fine, quando il corpo vien ridotto in riposo, la sua energia cinetica è esaurita, e l'intero lavoro che esso ha fatto è allora eguale all'intera energia cinetica che esso aveva in origine.

E ora si vede l'appropriatezza del nome di *energia cinetica*, che usammo sin qui per denominare il prodotto $\frac{1}{2}MV^2$.

L'energia di un corpo infatti fu definita (§ 72) come l'attitudine che esso possiede a produrre lavoro, ed è misurata dal lavoro che esso può fare.

L'energia *cinetica* di un corpo è l'energia che esso ha pel fatto di essere *in moto*, e dimostrammo ora che il suo valore è espresso da $\frac{1}{2}MV^2$ ossia $\frac{1}{2}MV \times V$, vale a dire, la metà del prodotto del suo momento per la sua velocità.

78. *Forze oblique.* — Se la forza agisce sul corpo ad angolo retto colla direzione del suo movimento, essa non produce lavoro sul corpo, ed altera la direzione, ma non la grandezza della velocità. L'energia cinetica, pertanto, che dipende dal quadrato della velocità, rimane invariata.

Se la direzione della forza non è nè coincidente, nè ad angolo retto con quella del movimento del corpo, possiamo risolvere la forza in due componenti, di cui l'una ad angolo retto colla direzione del movimento, e l'altra nella stessa direzione di questo (od in direzione opposta).

La prima di queste componenti può trascurarsi in ogni calcolo circa l'energia, dappoichè essa nè produce lavoro sul corpo, nè altera la sua energia cinetica.

La seconda componente è quella, che già considerammo altrove. Quando essa è nella direzione del moto, aumenta l'energia cinetica del corpo coll'incremento di lavoro che essa produce su di esso. Quando è in direzione opposta, l'energia cinetica del corpo è diminuita dalla quantità del lavoro che il corpo fa contro la forza.

In tutti i casi, adunque, l'incremento di energia cinetica è eguale al lavoro fatto sul corpo da un'azione esterna, e la diminuzione di energia cinetica è eguale al lavoro fatto dal corpo contro una resistenza esterna.

79. *Energia cinetica di due particelle, riferita al loro centro di massa.* — L'energia cinetica di un sistema materiale è eguale a quella di una egual massa, che si muova colla velocità del centro di massa del sistema, unitamente all'energia cinetica dovuta al moto delle parti del sistema rispetto al suo centro di massa.

Incominciamo col caso di due particelle di massa A e B, e le cui

velocità sieno rappresentate nel diagramma delle velocità dalle linee $\overline{oa}$ e $\overline{ob}$. Se c è il centro di massa di una particella eguale ad A posta

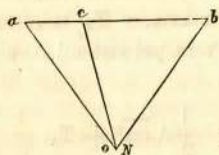



Fig. 10.

n a, e di altra eguale a B posta in b, $\overline{oc}$ rappresenterà la velocità del centro di massa delle due particelle.

L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche delle particelle, ossia

$$T = \frac{1}{2} A \overline{oa}^2 + \frac{1}{2} B \overline{ob}^2$$

Esprimendo $\overline{oa}^2$ e $\overline{ob}^2$ nei termini di $\overline{oc}$, $\overline{ca}$ e $\overline{cb}$, e ponendo l'angolo $o\hat{c}a = \theta$ si avrà

$$T = \frac{1}{2} A \overline{oc}^2 + \frac{1}{2} A \overline{ca}^2 - A \overline{oc}.\overline{ca} \cos.\theta$$
$$+ \frac{1}{2} B \overline{oc}^2 + \frac{1}{2} B \overline{cb}^2 - B \overline{oc}.\overline{cb} \cos.\theta$$

Ma, poichè c è il centro di massa di A posto in a e di B in b, sarà

$$A.\overline{ca} + B.\overline{cb} = 0$$

E quindi, addizionando

$$T = \frac{1}{2}(A+B)\overline{oc}^2 + \frac{1}{2} A \overline{ca}^2 + \frac{1}{2} B \overline{cb}^2,$$

ovvero l'energia cinetica del sistema di due particelle A e B è eguale a quella di una massa eguale ad (A + B) che si muove colla velocità del centro di massa, unitamente a quella del movimento delle particelle relative al centro di massa.

80. *Energia cinetica di un sistema materiale riferita al suo centro di massa.* — Abbiamo cominciato col caso di due particelle, perchè il moto di una particella si assume come quello del suo centro di massa, e abbiamo dimostrata vera la nostra proposizione per un sistema di due particelle. Ma se la proposizione è vera per ciascuno di due sistemi materiali separatamente, lo sarà pure pel sistema che esse formano assieme.

Infatti se noi supponiamo che $\overline{oa}$ ed $\overline{ob}$ rappresentino le velocità

dei centri di massa di due sistemi materiali A e B, $\overline{oc}$ rappresenterà la velocità del centro di massa del sistema combinato A + B; e se T_A rappresenta l'energia cinetica del movimento del sistema A relativo al suo proprio centro di massa, e T_B lo stesso pel sistema B, allora, quando la proposizione sia vera pei sistemi A e B presi separatamente, l'energia cinetica di A è

$$\frac{1}{2} A \overline{oa}^2 + T_A$$

e quella di B

$$\frac{1}{2} B \overline{ob}^2 + T_3$$

L'energia cinetica dell'intero sistema è quindi

$$\frac{1}{2} A \overline{oa}^2 + \frac{1}{2} B \overline{ob}^2 + T_A + T_B$$

ovvero, per quanto s'è veduto poc'anzi

$$\frac{1}{2}(A + B) \overline{oc}^2 + \frac{1}{2} A \overline{ca}^2 + T_A + \frac{1}{2} B \overline{cb}^2 + T_B.$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica di una massa eguale a quella dell'intero sistema che si muove colla velocità del centro di massa di esso.

Il secondo ed il terzo, presi assieme, rappresentano l'energia cinetica del sistema A relativa al centro di gravità dell'intero sistema, e il quarto ed il quinto lo stesso pel sistema B.

Quindi, se la proposizione è vera pei due sistemi A e B presi separatamente, è vera pure pel sistema composto di A e B. Ma noi la dimostrammo vera pel caso di due particelle; essa lo è di conseguenza per tre, quattro o un numero qualsivoglia di particelle, e perciò per un sistema materiale.

L'energia cinetica di un sistema riferita al suo centro di massa, è minore di quando vien riferita a qualsivoglia altro punto.

Infatti questa quantità eccede quella di una quantità eguale all'energia cinetica di una massa eguale a quella dell'intero sistema muoventesi colla velocità del centro di massa relativa all'altro punto, e poichè ogni energia cinetica è essenzialmente positiva, questo eccesso deve essere positivo.

81. *Energia cinetica utile.* — Abbiamo di già veduto (§ 64) che la mutua azione fra le parti di un sistema materiale non può mutare la velocità del centro di massa del sistema. Quella parte soltanto dell'energia cinetica del sistema, che dipende dal moto del centro di massa, non può essere affetta da alcuna azione interna al sistema.

È perciò impossibile, mediante la mutua azione delle parti del sistema, il convertire in lavoro questa porzione di energia. Per quanto riguarda il sistema stesso, questa energia è inefficace, e solo la si potrà convertire in lavoro mediante l'azione fra il sistema stesso ed alcun altro sistema al medesimo esterno.

Quindi, se si considera un sistema materiale non connesso con qualunque altro sistema, la sua energia cinetica utile è quella che è dovuta ai movimenti delle parti del sistema relativi al suo centro di massa.

Supponiamo che l'azione fra le parti del sistema sia tale che, dopo un certo tempo, la figura del sistema diventi invariabile, e chiamiamo questo processo la solidificazione del sistema. Abbiamo dimostrato (§ 71) che il momento angolare dell'intero sistema non è mutato da qualsiasi mutua azione delle sue parti. Se pertanto il momento angolare iniziale è zero, il sistema, quando la sua forma diventa invariabile, non ruoterà attorno al suo centro di massa; ma, se esso mai si muove, lo farà parallelamente a sè stesso, e le parti rimarranno in riposo relativamente al centro di massa. In questo caso quindi l'intera energia utile sarà convertita in lavoro dalla mutua azione delle parti durante la solidificazione del sistema.

Se il sistema ha un momento angolare, lo avrà pure, e il medesimo, quando sia solidificato. Esso ruoterà quindi attorno al suo centro di massa, ed avrà perciò sempre l'energia di moto relativa al centro medesimo; e questa residua energia cinetica non si sarà convertita in lavoro.

Ma, se le parti del sistema ponno separarsi l'una dall'altra in direzioni perpendicolari all'asse del momento angolare del sistema, e se esso si solidifica in tale stato di espansione, la residua energia cinetica di rotazione attorno il centro di massa sarà meno grande della espansione del sistema. Cosicchè, coll'espandere sufficientemente il sistema, potremo rendere la residua energia cinetica piccola quanto vogliamo, per modo che l'intera energia cinetica, relativa al centro di massa del sistema, può essere convertita in lavoro nell'interno del sistema.

82. *Energia potenziale.* — L'energia potenziale di un sistema materiale è l'attitudine che esso ha a produrre lavoro dipendentemente da circostanze estranee a quella del moto totale del sistema. In altre parole, dicesi *energia potenziale* quell'energia che non è cinetica.

Nel sistema materiale teorico, quale noi lo costruiamo nella nostra immaginazione, in base alle idee fondamentali di materia e di moto, non entrano altre condizioni all'infuori della figura e del moto delle differenti masse onde il sistema è composto.

Quindi in un sistema siffatto le circostanze da cui l'energia può dipendere sono unicamente il moto e la figura. E poichè l'energia cine-

tica dipende dal movimento, l'energia potenziale dovrà dipendere dalla figura.

In parecchi sistemi materiali reali, sappiamo qual parte dell'energia dipenda dalla figura. Così la molla principale di un orologio ha maggiore energia quando è avvolta, di quando è parzialmente svolta. E due sbarre magnetiche hanno maggior energia allorquando sono collocate di fianco, coi poli simili nella medesima direzione, di quando si collocano vicini l'un all'altro i loro poli dissimili.

83. *Elasticità.* — Nel caso della molla possiamo rappresentare la connessione fra l'avvolgimento della molla e la forza che essa esercita, col concepire la molla divisa (immaginariamente) in parti piccolissime od elementi. Allorquando essa è avviluppata, la forma di ciascuna di queste parti è alterata, e una tale alterazione di forma di un corpo solido chiamasi *tensione.*

Nei corpi solidi la tensione è accompagnata da una forza o sforzo interno. Quei corpi nei quali lo sforzo dipende solamente dalla tensione diconsi *elastici*, e la proprietà di esercitare sforzo allorquando sono tesi chiamasi *elasticità.*

Troviamo così che l'avvilupparsi della molla involge la tensione dei suoi elementi, e che la forza esterna da essa esercitata è la risultante degli sforzi di questi elementi.

Per tal modo, all'immediata relazione fra l'avvilupparsi della molla e lo sforzo che essa esercita, noi sostituiamo una relazione fra le tensioni e gli sforzi degli elementi della molla. Vale a dire, ad ogni singolo spostamento e ad ogni singola forza, la cui relazione può in certi casi essere di natura oltremodo complicata, noi sostituiamo una quantità di tensioni ed un egual numero di sforzi, restando così ciascuna tensione connessa col corrispondente sforzo da una relazione alquanto più semplice.

Ma dopo tutto ciò, la natura della connessione fra figura e forza rimane misteriosa al pari di prima. Possiamo solo ammettere il fatto: e se tutti questi fenomeni li chiamiamo fenomeni di elasticità, possiamo trovare assai conveniente di classificarli in tal guisa, purchè si ricordi che coll'uso della parola *elasticità* non intendiamo di esprimere la causa della connessione fra figura ed energia. (1)

84. *Azione a distanza.* — Nel caso di due magneti non v'ha alcuna sostanza visibile, che colleghi i corpi fra i quali esiste lo sforzo. Lo spazio fra i magneti può venir riempito d'aria o di acqua, ovvero

(1) Appunto per ciò accade, come diciamo altrove, che alle forze elastiche de' corpi convien sempre cercare una condizione fisica, corrispondente ad un'energia tensiva delle parti del sistema, rispetto al loro comun centro di massa. G. C.

possiamo collocare i magneti in un vaso e toglierne l'aria con una macchina pneumatica, sicchè i magneti si trovino in tale spazio, che diciamo vuoto, e non pertanto la reciproca azione dei magneti non sarà alterata. Possiamo anche collocare una lastra di vetro, di metallo o di legno fra i magneti, e sempre troveremo che la loro mutua azione dipende semplicemente dalla loro posizione relativa, e non è percettibilmente modificata dal collocare qualunque sostanza fra di essi, a meno che questa sia essa medesima una sostanza magnetica. L'azione quindi fra i magneti esprimesi comunemente quale *un'azione a distanza*.

Si fecero dei tentativi, con qualche successo [1], per analizzare questa azione a distanza con una distribuzione continua di sforzi attraverso un mezzo invisibile, e stabilire così un'analogia fra l'azione magnetica e quella di una molla, o di un corpo nel trasmettere una forza. Ma sta sempre il fatto generale: che le tensioni o cambiamenti di figura sono accompagnati da sforzi o forze interne, e che perciò l'energia accumulata nel sistema, così teso, rimane un fatto non ancora spiegato per mezzo di un principio più fondamentale.

85. *La teoria dell'energia potenziale è più complicata di quella dell'energia cinetica.* — Ammettendo che l'energia di un sistema materiale dipenda dalla sua figura, il modo di questa dipendenza può essere più complicato di quello per cui l'energia cinetica dipende dal moto del sistema.

L'energia cinetica infatti può calcolarsi dal moto delle parti del sistema con un metodo invariabile: cioè moltiplichiamo la massa di ciascuna parte per la metà del quadrato della sua velocità, e facciamo la somma di tutti questi prodotti.

Ma l'energia potenziale, originata dalla mutua azione di due parti del sistema, può dipendere dalla posizione relativa delle parti in un modo che può variare nei differenti casi.

Così, quando due palle da bigliardo si avvicinano tra loro da una data distanza, non vi è azione sensibile fra di esse, fino a che sono così vicine l'una all'altra da sembrare a contatto. Coll'avvicinare maggiormente i centri delle due palle, le parti in contatto devono schiacciarsi, e ciò richiede un dispendio di lavoro.

In questo caso pertanto l'energia potenziale è costante per tutte le distanze maggiori di quelle del primo contatto, e di poi aumenta rapidamente quando la distanza è diminuita.

La forza fra i magneti varia colla distanza in un modo assai differente, ed infatti troviamo che solo mediante l'esperienza possiamo ac-

(1) Vedi il *Trattato di elettricità e magnetismo*, di Clerk Maxwell. Vol. II, art. 641.

certare le forme della relazione fra la figura di un sistema e la sua energia potenziale.

86. *Applicazione del concetto di energia al calcolo delle forze.* — Una completa conoscenza del modo con cui varia l'energia di un sistema materiale, quando vengono a variare la figura ed il moto del medesimo, equivale matematicamente ad una conoscenza di tutte le proprietà dinamiche del sistema. I metodi matematici, mediante i quali tutte le forze e gli sforzi in un sistema mobile sono dedotti dalla semplice formula matematica, che esprime l'energia come una funzione delle variabili, vennero sviluppate da Lagrange, Hamilton ed altri matematici eminenti.

Laonde sarebbe difficile appunto il descriverli, nei termini delle idee elementari a cui in questo libro ci restringiamo. Un cenno di questi metodi è dato nel mio *Trattato sull'elettricità* (Par. IV, cap. V, art. 553), e l'applicazione di questi metodi dinamici ai fenomeni elettro-magnetici si trova nei capitoli successivi.

Ma, se consideriamo unicamente il caso di un sistema in quiete, torn facile il vedere come si possano determinare le forze del sistema, ove si conosca di quanto la sua energia dipenda dalla sua figura.

Supponiamo infatti che un agente esterno al sistema produca lo spostamento da una figura ad un'altra. Allora, se nella nuova figura il sistema possiede maggior energia che non in origine, esso deve aver ricevuto questo incremento di energia solo da un agente esterno. Questo agente pertanto deve aver fatto un'accumulazione di lavoro eguale all'incremento di energia, e deve quindi aver esercitato una forza nella direzione dello spostamento; anzi il valore medio di questa forza, moltiplicata per lo spostamento, deve essere eguale al lavoro fatto. Il valore medio della forza può quindi trovarsi col dividere l'incremento di energia per lo spostamento.

Se lo spostamento è grande, questa forza può variare considerevolmente, mentre va compiendosi, per modo che può tornar difficile il calcolarne il valore medio. Ma, poichè la forza dipende dalla figura, se noi facciamo lo spostamento sempre più piccolo, la variazione della forza diverrà più e più piccola; talchè in ultimo essa potrà riguardarsi come sensibilmente costante durante lo spostamento.

Laonde, se calcoliamo per una data figura il rapporto fra l'aumento dell'energia e lo spostamento, con un metodo simile a quello sopra descritto ai § 27, 28 e 33, questo rapporto sarà numericamente eguale alla forza esercitata dall'agente esterno nella direzione dello spostamento.

Se l'energia diminuisce, invece di crescere, a misura che aumenta lo spostamento, il sistema deve produrre lavoro sull'agente esterno, e la

forza esercitata dall'agente esterno deve essere in direzione opposta a quella dello spostamento.

87. *Significato della direzione delle forze.* — Nei trattati di dinamica, le forze di cui si parla sono di solito quelle esercitate da un agente esterno sul sistema materiale. Invece nei trattati di elettricità si parla generalmente di forze esercitate da un sistema elettrizzato contro un agente esterno che impedisce al sistema di muoversi. È necessario quindi, nel leggere una esposizione circa le forze, lo stabilire se la forza di cui si parla deve considerarsi dall'un punto di vista, o dall'altro.

Si può, in generale, evitare ogni ambiguità, considerando il fenomeno come un tutto, e parlando di esso come di uno sforzo esercitato fra due punti o corpi, distinguendolo in tensione e pressione, oppure in attrazione e ripulsione, a norma della sua direzione (§ 55).

88. *Applicazione ad un sistema in moto.* — Emerge da ciò che la conoscenza dell'energia potenziale di un sistema in ogni possibile figura, la si può dedurre da tutte le forze esterne richieste per tenere il sistema stesso in una data figura. Se il sistema è in quiete, e se queste forze esterne sono le forze attuali, il sistema rimarrà in equilibrio. Se è in moto, la forza che agisce su ciascuna particella è quella originata dalle connessioni del sistema (eguale e contraria alla forza esterna testè calcolata), unitamente a qualsivoglia forza esterna che possa essere ad esso applicata. Una completa conoscenza quindi del modo con cui l'energia potenziale varia colla figura, ci abiliterebbe a predire ogni possibile movimento del sistema sotto l'azione di date forze esterne; purchè ci troviamo in grado di vincere le difficoltà, puramente matematiche, del calcolo.

89. *Applicazione del concetto di energia all'investigazione di corpi reali.* — Quando passiamo dalla dinamica astratta alla fisica — dai sistemi materiali, le cui proprietà sono soltanto quelle espresse dalle loro definizioni, ai corpi reali, le cui proprietà sono da ricercare, — troviamo che vi sono parecchi fenomeni, che non si possono spiegare siccome cambiamenti nella figura e nel movimento di un sistema materiale.

Naturalmente, se cominciamo coll'ammettere che i corpi reali sieno sistemi composti di materia, giusta que' rispetti che veniamo definendo, possiamo procedere ad asserire che tutti i fenomeni sono cambiamenti di figura e di moto, sebbene non siamo ancora in grado di definire le specie di figura e di movimento, coi quali i particolari fenomeni possono essere spiegati.

Ma nella scienza positiva, o meglio esatta, tali supposte spiegazioni devono essere valutate, non dalle loro promesse, ma dai loro atti. La figura ed il moto di un sistema sono fatti suscettibili di essere descritti

in modo accurato: e perciò, affinchè la spiegazione di un fenomeno mediante la figura ed il moto di un sistema materiale possa ammettersi come un incremento nelle nostre cognizioni scientifiche, le figure, i moti e le forze devono essere specificati, e si deve poter dimostrare che essi si accordano coi fatti così da dar ragione, anche quantitativamente, dei singoli fenomeni.

90. *Variabili da cui dipende l'energia.* — Ma ancor quando i fenomeni, che ci accingiamo a studiare, non siano stati sino ad ora spiegati dinamicamente, possiamo sempre utilmente applicare il principio della conservazione dell'energia, quale guida nelle nostre ricerche.

Ad applicare questo principio dobbiamo in primo luogo ammettere che la quantità di energia in un sistema materiale dipende dal suo stato; cosicchè per un dato stato vi è una somma definita di energia.

Il primo passo quindi è quello di definire i differenti stati del sistema. E quando trattasi di corpi reali, devesi definire il loro stato non solo rispetto alla figura ed al movimento delle loro parti visibili, ma, ove s'abbia motivo di sospettare che la figura ed il moto delle loro parti invisibili influiscano sul fenomeno visibile, devesi ricercare qualche metodo di valutare l'energia che ne viene originata.

Così pressione, temperatura, potenziale elettrico e composizione chimica sono quantità variabili, le cui valutazioni servono a precisare lo stato di un corpo, e in generale l'energia del corpo dipende dai valori di queste e di altre variabili.

91. *Energia espressa nei termini delle variabili.* — Dopo di che la nostra ricerca deve esser rivolta a determinare quanto lavoro richiedesi da un agente esterno affinchè il corpo passi da un determinato stato ad un altro.

A tal uopo basta conoscere il lavoro richiesto per far passare il corpo da uno stato particolare, che possiamo chiamare *stato tipico*, in un altro stato determinato. L'energia in quest'ultimo stato è eguale a quella nello stato tipo, unitamente al lavoro richiesto per portarlo da questo allo stato definito. Il fatto che questo lavoro riesce lo stesso, qualunque sia la serie degli stati attraverso cui il sistema è passato dallo stato tipo allo stato determinato, è il fondamento di tutta la teoria dell'energia.

Posto che tutti i fenomeni dipendano dalle variazioni dell' energia del corpo, e non dal suo valore totale, torna inutile, quand'anche fosse possibile, il procedere alla valutazione dell'energia del corpo nel suo stato tipo.

92. *Teoria del calore.* — Una delle più importanti applicazioni del principio della conservazione dell'energia è la ricerca della natura del calore.

Un tempo si supponeva che la differenza fra gli stati di un corpo, piuttosto caldo che freddo, fosse dovuta alla presenza di una sostanza chiamata *calorico,* che entrasse in quantità maggiore nel corpo caldo che nel freddo. Ma le esperienze di Rumford sul calore prodotto dallo sfregamento dei metalli, e quelle di Davy sulla liquefazione del ghiaccio mediante l'attrito, dimostrarono che, quando il lavoro è speso in un efficace attrito, la somma del calore prodotto è proporzionale al lavoro speso.

Le esperienze di Hirn dimostrarono pure che quando il calore produce lavoro in una macchina a vapore, parte del calore scompare, e questa parte di calore è proporzionale al lavoro fatto.

Una misura assai accurata del lavoro speso nello sfregamento, e del calore prodotto, venne fatta da Joule, il quale trovò che il calore richiesto per iscaldare un chilogramma d'acqua da 0° ad 1° C. equivale al lavoro di chilogrammetri 423,5.

93. *Il calore è una forma di energia.* — Ora, poichè il calore è tal atto che può ingenerarsi in un corpo, e con varia misura, come una velocità, esso non può essere una sostanza. E siccome poi, ogniqualvolta un'energia meccanica è perduta mediante un attrito vi è produzione di calore, e ogniqualvolta avvi un guadagno di energia meccanica in una macchina vi è perdita di calore, ed anzi la quantità di energia perduta o guadagnata è proporzionale alla quantità di lavoro guadagnata o perduta, così noi dobbiamo concludere che *il calore è una forma di energia.*

V'hanno pure motivi per credere che le minute particelle di un corpo caldo siano in uno stato di rapida agitazione, vale a dire, che ciascuna particella si muova rapidamente, ma che la direzione del suo moto varii così di frequente, da spostarsi di poco.

Se così fosse, una parte, e potrebbe essere una parte assai grande, dell'energia di un corpo caldo deve trovarsi sotto forma di energia cinetica.

Pel nostro proposito, però, non è necessario di accertare in qual forma l'energia esista in un corpo caldo. Il fatto più importante è che l'energia può essere misurata in forma di calore. E poichè ogni specie di energia può convertirsi in calore, possiamo ritrarre da ciò uno dei metodi più convenienti per misurarla.

94. *L'energia misurata come calore.* — Così, allorquando date sostanze vengono poste in contatto, hanno luogo azioni chimiche: cioè esse si combinano in un nuovo modo, e il nuovo gruppo ha proprietà chimiche differenti da quelle dei primitivi gruppi. Durante questo processo meccanico un lavoro può essere fatto coll'espansione della miscela,

come allorquando si accende la polvere da fuoco; può prodursi una corrente elettrica, come nella batteria voltaica, e può generarsi calore, come nella maggior parte delle azioni chimiche.

L'energia estrinsecata sotto forma di lavoro meccanico può misurarsi direttamente, od essere trasformata in calore mediante sfregamento. L'energia spesa nel produrre la corrente elettrica può valutarsi come calore, obbligando la corrente a percorrere un conduttore di tal forma, che il calore in esso prodotto possa facilmente misurarsi. Devesi solo aver riguardo a che nessuna energia venga trasmessa a distanza sotto forma di suono o di calore raggiante, senza tenerla in debito conto.

L'energia che rimane nel miscuglio, unitamente a quella sfuggita, deve essere eguale all'energia iniziale.

Andrews, Favre, Silbermann ed altri hanno misurato le quantità di calore prodotte quando una data quantità di ossigeno o di cloro si combina col proprio equivalente di altre sostanze. Queste misure ci mettono in grado di calcolare l'eccesso dell'energia che dette sostanze avevano nel loro stato iniziale, quando non erano combinate, rispetto a quello che possedono dopo la combinazione.

95. *Lavoro scientifico da farsi.* — Sebbene molti lavori eccellenti di questo genere siansi già fatti, l'estensione del campo fin qui investigato appare affatto insignificante, se ci facciamo a considerare l'illimitata varietà e la complessità dei corpi naturali che ci restano da investigare.

Infatti, nelle attuali condizioni della scienza il còmpito del fisico investigatore sta nella determinazione della quantità di energia che appare o scompare in un sistema materiale, durante il suo passaggio dallo stato tipo ad un altro stato definito.

96. *Storia della dottrina dell'energia.* — L'importanza scientifica di dare un nome alla quantità che noi chiamiamo energia cinetica sembra essere stata riconosciuta primamente da Leibnitz, che diede al prodotto della massa pel quadrato della velocità il nome di *Vis viva.* Questa è il doppio dell'energia cinetica.

Newton nello " *Scolio alle leggi del moto* „ esprime la relazione esistente fra la misura del lavoro fatto dall'agente esterno, e la misura con cui essa è estrinsecata, accumulata o trasformata da una macchina o da qualsivoglia altro sistema materiale, e nel far ciò egli dimostra quante ampie applicazioni possa avere la terza legge del moto.

" Se l'azione, egli dice, dell'agente esterno è valutata dal prodotto della sua forza per la sua velocità, e la reazione della resistenza lo è similmente dal prodotto della velocità di ciascuna parte del sistema per la forza resistente originata dall' attrito, della coesione, dal peso,

e dall'accelerazione, l'azione e la reazione saranno eguali l'una all'altra, qualunque sia la natura e il movimento del sistema. „

Siffatta dichiarazione di Newton contiene implicitamente l'intera dottrina dell'energia, siccome fu primamente avvertito da Thomson e Tait

Le parole *azione* e *reazione*, come presentansi nell'enunciato della terza legge del moto (§ 55) vengono intese siccome forze; vale a dire che esse esprimono i due aspetti opposti di un identico sforzo.

Nel passo summenzionato vien dato un senso nuovo e differente a queste parole, col valutare l'azione e la reazione mediante il prodotto di una forza per la velocità del suo punto di applicazione. Secondo questa definizione l'azione dell'agente esterno è la misura del lavoro che esso produce. Questo è quanto si intende per *potenza* di una macchina a vapore o di qualunque altro motore. Essa si esprime generalmente colla valutazione del numero di cavalli-vapore ideali che si richiederebbero per produrre il lavoro nella medesima misura della macchina, e questo numero dicesi la *forza* in cavalli-vapore della medesima.

Allorquando si vuol esprimere, con una sola parola, la misura di un lavoro prodotto da un agente, lo chiamiamo la potenza dell'agente, definendo la *potenza* per il lavoro fatto nell'unità di tempo.

L'uso del vocabolo *energia*, con un significato preciso e scientifico, per esprimere la quantità di lavoro che un sistema materiale può compiere, venne introdotto dal Joung. [1]

97. *Diverse forme di energia.* — L'energia, che un corpo ha in virtù del proprio moto, è chiamata *energia cinetica.*

Un sistema può anche avere energia in virtù della sua figura, se le forze del sistema sono tali che il sistema abbia a produrre lavoro contro una resistenza esterna, mentre passa dall' una all'altra. Questa energia dicesi *energia potenziale.*

Così, allorquando una pietra sia stata, in qualsiasi modo, sollevata ad una certa altezza sulla superficie terrestre, il sistema dei due corpi, la pietra e la terra, ha un'energia potenziale, ed è capace di produrre una data somma di lavoro durante la discesa della pietra. Quest'energia potenziale è dovuta al fatto che la pietra e la terra si attraggono l'una l'altra: cosicchè fu speso un lavoro da chi ha sollevato la pietra e la spinse lungi dalla terra, e dopo ciò l'attrazione fra la terra e la pietra è capace di produrre un lavoro, man mano che la pietra discende. Quest'energia dipende quindi dal lavoro che le forze del sistema farebbero, quando le sue parti dovessero obbedire all'azione di queste forze. Essa fu chiamata *somma delle tensioni* nella celebre memoria

(1) Letture sulla filosofia naturale. — Lettura VIII.

*

di Helmholz sulla “ *Conservazione dell'Energia.* „ (1) Thomson la chiamò *energia statica,* e fu anche detta *energia di posizione.* Rankine la denominò *Energia potenziale:* espressione felicissima, dappoichè significa non solo l'energia che il sistema non manifesta in atto, ma è in grado di svolgere, ed indica altresì la connessione di siffatta energia con ciò che, per altri riguardi, si chiamò *funzione potenziale.*

Le differenti forme colle quali l'energia ci si presentò nei sistemi materiali vennero poste nell'una o nell'altra di queste classi: energia cinetica dovuta al moto, ed energia potenziale dovuta alla figura.

Così un corpo caldo, col cedere calore a un corpo freddo, può produrre lavoro, obbligando il corpo freddo ad espandersi in senso opposto ad una pressione. Un sistema materiale quindi in cui vi è una distribuzione non uniforme di temperatura ha la capacità di produrre lavoro, cioè ha energia. Quest'energia è considerata in oggi quale un'energia cinetica, dovuta ad un moto di agitazione nelle particelle del corpo caldo.

La polvere pirica ha energia, perchè allorquando esplode è capace di porre in movimento una palla da cannone.

L'energia di essa è un'energia chimica suscitata dal potere che i suoi costituenti possedono di disporsi in nuova guisa, allorquando viene esplosa, per modo da occupare un volume molto maggiore di quello della polvere.

Oggidì i chimici si rappresentano l'azione chimica quale una mutazione nella disposizione delle particelle sotto l'azione di forze che tendono a produrre un cambiamento di disposizione.

Da questo punto di vista, pertanto, l'*energia chimica* è energia potenziale.

L'aria compressa nella camera di un fucile a vento è capace di spingere fuori una palla. L'energia dell'aria compressa supponevasi una volta originata dalla mutua ripulsione delle sue particelle. Se tale spiegazione fosse la vera, la sua energia sarebbe potenziale.

In questi ultimi tempi si pensò invece che le particelle dell'aria sieno in moto, e che la sua pressione sia causata dall'urto di esse sulle pareti del recipiente. Secondo questa teoria l'energia dell'aria compressa è del pari un'energia cinetica.

Sonvi parecchi modi differenti, ne' quali un sistema materiale possiede energia. Può essere dubbio, in taluni casi, se tale energia sia di forma cinetica, ovvero potenziale.

---

(1) Berlino 1847. Tradotta in inglese nelle « *Memorie scientifiche di Taylor,* e voltata in francese nel 1853.

Tuttavia la n tura dell' energia è la stessa qualunque sia la forma in cui possa trovarsi; perciocchè la quantità di energia può sempre esprimersi come quella di un corpo di massa definita, che si muova con una velocità definita.

CAPITOLO VI.

Ricapitolazione.

98. *Intento della dinamica astratta.* — Finora trattammo di quella parte della scienza fondamentale del moto della materia, la quale può svolgersi in un modo abbastanza elementare, rispondente col disegno di questo libro.

Ci rimane ancora di dare uno sguardo generale ai rapporti sussistenti fra le parti di questa scienza, e lo possiamo ora fare in modo più soddisfacente che non ci era dato prima di aver svolto il soggetto.

99. *Cinematica.* — Incominciamo colla cinematica, o scienza astratta del moto. In questa scienza le idee tutte fondamentali sono quelle di spazio e di tempo. L'unico attributo della materia che ci occorre è la continuità della sua esistenza nello spazio e nel tempo; vale a dire, il fatto che ogni particella di materia, in qualsiasi istante di tempo, è in un luogo soltanto, e che il suo cambiamento di luogo durante un intervallo di tempo si compie mediante il movimento lungo un cammino continuo. In questa scienza pura del moto non occorre punto di considerare nè la forza che imprime moto al corpo, nè la massa di esso, da cui dipende la grandezza della forza richiesta.

100. *Forza.* — Nella successiva divisione della dinamica la forza vien riguardata siccome ciò che altera il movimento di una massa.

Se limitiamo l'attenzione ad un singolo corpo, allora coll'osservazione del suo movimento perveniamo a determinare la direzione e la grandezza della forza agente su di esso. Questa forma di ricerca è il tipo di tutte quelle che possiam fare per iscoprire e misurare le forze fisiche.

Ma ciò può risguardarsi siccome una semplice applicazione della definizione di forza, e non quale una nuova verità fisica.

Così, quando definiamo per forze eguali quelle che producono eguali accelerazioni nella medesima massa (e per masse eguali quelle che ri-

cevono eguali accelerazioni da forze eguali), allora troviamo che queste definizioni di eguaglianza importano l'affermazione di una verità fisica. Poichè il paragone delle quantità di materia, mediante le forze richieste a produrre in quelle una data accelerazione, è un metodo che sempre conduce a risultati attendibili, qualunque sieno le valutazioni assolute delle forze e dell'accelerazione.

101. *Sforzo.* — Un altro passo nella scienza delle forze è quello per cui dalla considerazione di una forza agente su di un corpo, passiamo a considerarla come una mutua azione fra due corpi, quale è quella chiamata da Newton *Azione* e *Reazione*, e che ora si esprime più brevemente colla parola *Sforzo.*

102. *Relatività delle cognizioni dinamiche.* — Cotesto progredire successivo nelle cognizioni nostre accenna un graduale sviluppo della dottrina della relatività di tutti i fenomeni fisici. Evidentemente dobbiamo riconoscere che il concetto di posizione è sempre relativo, giacchè non possiamo descrivere la posizione di un corpo senza indicare una relazione. Nel linguaggio comune si discorre di moto e di quiete senza escludere affatto la nozione della loro misura assoluta; ma la ragione è che, nel comune linguaggio, si suppone tacitamente essere la terra in quiete.

A misura che le idee nostre intorno allo spazio ed al tempo si fanno più chiare, giungiamo a vedere come tutta la scienza dinamica si raccolga in un sistema coerente.

L'uomo potè dapprima supporre che il sapere dove precisamente egli si trovi, e con qual direzione si muova, fosse cosa inerente alla propria esistenza, e suscettiva quindi d'essere conosciuta.

Ma siffatta credenza, benchè abbia potuto attecchire nella mente di uomini saggi dei tempi antichi, apparve gradatamente inarrivabile per la mente di chi si fece a studiare la scienza fisica.

Non v'ha limite alcuno nello spazio. Una porzione di esso è esattamente eguale a qualunque altra; talchè non possiamo dire dove siamo. Ci troviamo, per così dire, su un mare levigato, senza stelle, nè bussola, nè scandagli, nè venti od onde, e non possiamo dire in qual direzione ci muoviamo. Non abbiamo stromento da poter gettare, e col quale poter calcolare la via percorsa. Possiamo paragonare il nostro moto, rispetto ai corpi vicini, senza che conosciamo in qual modo questi si muovano nello spazio.

108. *Relatività della forza.* — Nè possiamo peranco dire qual forza agisca su di noi; solo possiamo esprimere la differenza fra la forza che agisce su di una cosa e quella che agisce su un'altra.

Ed un esempio di ciò l'abbiamo nella quotidiana esperienza. La terra

si muove attorno al sole, in un anno, alla distanza media di poco meno che 24 mila raggi terrestri. Ne consegue che sulla terra viene esercitata nella direzione del sole una forza, che produce un'accelerazione nella terra in direzione del sole rispondente all'incirca ad $\frac{1}{1680}$ della accelerazione di gravità alla superficie terrestre.

Una forza d'incirca la millesettecentesima parte del peso d'un corpo potrebbe facilmente misurarsi coi metodi sperimentali conosciuti, specialmente quando la direzione di questa forza riesca diversamente inclinata alla verticale nelle diverse ore del giorno.

Ora, se l'attrazione del sole si esercitasse sulla parte solida della terra, differentemente che sui corpi mobili su cui esperimentiamo, un corpo sospeso da un filo e muoventesi colla terra indicherebbe la differenza dell'azione esercitata dal sole su un tal corpo in particolare, e quella esercitata su l'insieme della terra.

Se, per esempio, il sole attraesse la terra e non il corpo sospeso, al sorgere del sole il punto di sospensione, che è rigidamente connesso colla terra, sarebbe attratto verso il sole, mentre sul corpo sospeso agirebbe soltanto l'attrazione della terra, e il filo sembrerebbe essere deviato dal sole di una millesettecentesima parte di sua lunghezza. Al tramonto esso sarebbe deviato dal sole nel senso opposto di un'eguale quantità.

Ma poichè l'attrazione viene egualmente esercitata sopra ogni specie di materia ad un'egual distanza dal corpo attraente, e poichè al sorgere ed al tramontare del sole il centro della terra e il corpo sospeso sono prossimamente alla medesima distanza dal sole, così accade che niuna deviazione del piombino, dovuta all'attrazione solare, potrà essere rilevata in questi due istanti.

L'attrazione del sole quindi, in quanto è egualmente esercitata su tutti i corpi terrestri, non produce effetto alcuno sui loro moti relativi.

Sarebbero solamente le differenze di intensità e direzione dell'attrazione agente sulle diverse parti della terra che potrebbero produrre un effetto sensibile. Ma queste differenze sono così piccole, pei corpi posti fra loro a distanze non troppo grandi, che il loro effetto riesce percettibile soltanto quando i corpi influenzati siano a distanze notevoli, come accade nelle acque dell'oceano, le quali per ciò offrono quei moti che diconsi *marea*.

104. *Rotazione.* — In tutto quanto dicemmo sinora intorno al moto dei corpi, supponemmo tacitamente che, nel paragonare la figura di un sistema con quello d'un altro, potessimo condurre nella figura finale una linea parallela alla figura iniziale. In altre parole, noi supponemmo che vi sono nello spazio certe direzioni che ponno riguardarsi siccome

costanti, e alle quali possono riferirsi, durante il movimento del sistema, altre direzioni.

In astronomia, una linea condotta dalla terra ad una stella può considerarsi come fissa in direzione, perchè il moto relativo della terra e della stella è in generale sì piccolo in confronto della loro distanza, che il cambiamento di direzione, anche in un secolo, è piccolissimo. Ma è manifesto che tutte queste direzioni di riferimento devono essere indicate dalla figura di un sistema materiale esistente nello spazio, e che se questo sistema fosse del tutto rimosso, le direzioni primitive di riferimento non potrebbero mai ricuperarsi.

Ma benchè sia impossibile il determinare la velocità assoluta di un corpo nello spazio, è però possibile il determinare se la direzione di una linea in un sistema materiale sia costante o variabile.

È possibile, a cagion d'esempio, mediante le osservazioni fatte unicamente sulla terra, senza riferirsi ai corpi celesti, il determinare se la terra ruoti o no.

Per quanto riguarda la figura geometrica della terra e dei corpi celesti, accade evidentemente la stessa cosa,

> « O sorga in ciel signoreggiante il sole
> Sovra la terra, o questa al sol sovrasti,
> Od ei dall' Orto imprenda il fiammeggiante
> Cammino, od essa dall' Occaso avanzi
> Il silente suo passo inoffensivo,
> Che lentamente roteando assonna,
> Mentre corre via via e dolcemente
> Insiem ti porta con la dolce auretta. »

Le distanze fra i corpi che compongono l' universo, sieno celesti o terrestri, e gli angoli fra le linee che li congiungono, ponno essere determinate, senza richiamarci ai principii dinamici, i quali non sono punto alterati se un moto di rotazione di tutto il sistema, simile a quello di un corpo rigido attorno ad un asse, si combina con un moto attuale. Cosicchè, dal punto di vista geometrico, il sistema di Copernico, secondo cui la terra ruota, non ha vantaggio alcuno, tranne la semplicità, a fronte di quello in cui si suppone la terra in riposo, e si suppongono quali moti reali quelli dei corpi celesti.

Pur spingendoci a considerare la teoria dinamica della terra che ruota attorno al proprio asse, possiamo dar ragione sia della figura appiatita sia dell'equilibrio dell'oceano e di tutti gli altri corpi alla sua superficie, con ambedue queste ipotesi, cioè quella del movimento della terra attorno al proprio asse, o quella che la terra non ruoti, ma sia obbligata ad assumere la sua figura appiatita da una forza premente, che

agisca dal difuori in tutte le direzioni verso il di lei asse, e la cui intensità vada scemando proporzionalmente alla distanza dall'asse. Qualora una tal forza agisse egualmente su tutte le specie di materia, ci darebbe ragione non solo dello schiacciamento della figura della terra, ma ben anco di tutte le condizioni di equilibrio di qualsiasi corpo in quiete rispetto alla terra.

Sol quando si proceda più oltre, e si considerino i fenomeni di corpi che sono in atto di moto rispetto alla terra, ci troviamo costretti ad ammettere che la terra ruota.

105. *Determinazione fatta da Newton sulla velocità assoluta di tutti i corpi.* — Newton fu il primo ad additare che il movimento assoluto di rotazione della terra può dimostrarsi collo sperimentare sulla rotazione di un sistema materiale.

Così, ad esempio, se un secchio di acqua si sospende ad un trave con una corda, e questa vien attorta per modo che il secchio ruoti attorno un asse verticale, l'acqua ruoterà insieme col secchio col quale forma un sistema.

Però l'acqua, entro il secchio così ruotante, si solleva ai lati e si deprime nel mezzo, mostrando con ciò che, per farla muovere circolarmente, devesi esercitare una pressione verso l'asse. Questa concavità della superficie dipende dal movimento assoluto e non dal movimento relativo dell'acqua.

Non può dipendere dalla rotazione relativa al secchio, giacchè al principio dell'esperimento, quando disponiamo il secchio perchè ruoti e prima che l'acqua partecipi al movimento, la superficie di questa è piana, perchè l'acqua ancora non ruota, ma solo il secchio.

Allorquando poi l'acqua ed il secchio ruotano insieme, non v'ha movimento alcuno dell'una relativamente all'altra, ma la superficie dell'acqua si fa concava in causa del proprio moto di rotazione.

Infine, allorquando il secchio si arresta, siccome l'acqua continua a ruotare, la superficie di questa rimane concava, mostrando così che essa conserva per alcun tempo quel moto che è pur cessato nel secchio.

E le cose procederanno del pari in codeste esperienze, sia che la rotazione avvenga nella direzione delle sfere di un orologio o in direzione contraria, purchè il rapporto della rotazione non sia mutato.

Supponiamo ora che una tale esperienza si faccia al polo Nord, e che il secchio, a mezzo di opportuno movimento d'orologeria, fosse fatto ruotare sia nella direzione della sfera di un orologio, sia in direzione contraria, con ragione perfettamente regolare.

Qualora le cose siano così disposte che, mediante il congegno di orologeria, il secchio faccia, nel senso delle sfere di un orologio, una

intera rotazione in ventiquattro ore (tempo siderale), esso ruoterà rispetto alla terra, ma non rispetto alle stelle.

Se poi il congegno d'orologeria viene arrestato, esso ruoterà rispetto alle stelle, ma non più rispetto alla terra.

Se finalmente si faccia in modo che ruoti una volta in ventiquattro ore (tempo siderale) in direzione opposta, esso ruoterà rispetto alla terra colla medesima ragione di prima, ma invece di essere scevro d'ogni rotazione rispetto alle stelle, esso si troverà in movimento di rotazione colla ragione di un giro ogni dodici ore.

Quindi, se la terra è in quiete e le stelle si muovono attorno ad essa, la forma delle superficie sarà la medesima nel primo e nell'altro caso; ma se la terra ruota, l'acqua ruoterà nel secondo caso, ma non nel primo, e ciò sarà reso manifesto dall'acqua che si solleva lateralmente alle pareti più alta in questo secondo caso che non nel primo.

La superficie dell'acqua non sarà realmente concava in alcuno dei casi supposti, perchè la gravità agendo verso il centro della terra tende a rendere la superficie convessa, come è quella del mare, e la rotazione nella nostra esperienza non è sufficientemente rapida per rendere la superficie concava. Soltanto essa la renderà di poco meno convessa che la superficie del mare nel secondo caso, e un poco più nel primo.

Ma la differenza nella forma della superficie dell'acqua sarebbe così piccola, che coi nostri metodi di misura tornerebbe vano ogni tentativo per determinare la rotazione della terra in siffatta guisa.

106. *Pendolo di Foucault.* — Il metodo più soddisfacente per fare un'esperienza a questo intento venne divisato da Foucault [1].

Una palla pesante è sospesa con un filo metallico ad un punto fisso, per modo da poter oscillare come un pendolo in qualunque piano verticale che passi pel punto fisso. Convien però badare che la palla (dianzi sollevata col deviare il pendolo dalla verticale) nell' atto in cui viene abbandonata, abbia a compiere la prima sua oscillazione in tal modo che, lorquando il di lei centro di massa trovasi nel punto più basso dell'arco descritto, passi esattamente per la verticale corrispondente alla posizione di riposo. Altrimenti, se esso passa da una parte di questa posizione, vi ritornerà dall'altra; e siffatto movimento del pendolo attorno alla verticale, anzichè attraverso di essa, devesi accuratamente evitare, per non complicare il fenomeno.

---

(1) Ben prima il nostro Tadini, nel *Giornale di Fisica*, ecc., di Pavia del 1796, interpretando un concetto proposto dal Galileo e meglio svolto dal Guglielmini, trovò modo di dimostrare, con moltissima approssimazione, la sussistenza e la grandezza della rotazione terrestre, mercè la deviazione orientale dei gravi cadenti. G. C.

Consideriamo ora il momento angolare del pendolo attorno alla linea verticale passante pel punto di sospensione.

All'istante in cui il filo del pendolo passa attraverso la linea verticale, il momento angolare attorno alla linea verticale è zero.

La forza di gravità agisce sempre parallelamente a questa linea verticale, talchè non può produrre alcun momento angolare attorno ad essa. La tensione del filo agisce sempre attraverso il punto fisso, per modo che non può produrre momento angolare alcuno attorno la linea verticale.

Il pendolo quindi non può mai acquistare momento angolare attorno alla linea verticale che passa pel punto di sospensione.

Pertanto quando il filo è fuori della verticale, il piano verticale che passa pel centro della palla e il punto di sospensione non possono ruotare, giacchè diversamente il pendolo avrebbe un momento angolare attorno la linea verticale.

Supponiamo ora di eseguire questa esperienza al polo Nord. Il piano di oscillazione del pendolo rimarrà assolutamente costante in direzione, per modo che se la terra ha un moto proprio di rotazione, questo si renderà manifesto. Basterà tracciare sulla terra una linea parallela al piano di oscillazione, e paragonare di poi la posizione di tale traccia rispetto a quella del piano anzidetto.

Siccome un pendolo così fatto può oscillare per parecchie ore, torna facile il decidere se la posizione del piano di oscillazione sia costante rispetto alla terra, come lo sarebbe se la terra fosse in quiete, oppur riesca costante rispetto alle stelle, come accader deve ove queste non si muovano attorno alla terra.

Supponemmo, per maggior semplicità, che l'esperimento siasi fatto al polo Nord; ma non è necessario l'andare sino là per dimostrare la rotazione della terra.

L'unica regione ove siffatto esperimento non riuscirebbe è quella dell'equatore.

In qualsiasi altro luogo il pendolo indica la misura della rotazione della terra rispetto alla verticale del luogo. Se ad un istante qualsiasi il piano del pendolo passa attraverso una stella vicina all'orizzonte, sia che essa sorga o tramonti, continuerà a passarvi sinchè è prossima all'orizzonte. Val quanto dire che la parte orizzontale del moto apparente di una stella sull'orizzonte è eguale alla ampiezza di rotazione del piano di oscillazione del pendolo.

Nell'emisfero australe il piano di oscillazione sembra ruotare in direzione contraria alla precedente.

Dal confronto delle misure nei differenti luoghi il tempo attuale di

rotazione della terra può essere dedotto indipendentemente dalle astronomiche osservazioni [1].

107. *Materia ed Energia.* — Le nostre cognizioni relative alla materia si riferiscono ad una serie di fenomeni nei quali l'energia viene trasferita da una porzione di materia ad un'altra, sinchè in qualche parte della serie intervenga lo stesso nostro corpo, poichè allora riceviamo una sensazione.

Mediante il processo mentale, fondato sulle nostre sensazioni, veniamo ad apprendere le condizioni di queste sensazioni e ad attribuirle ad oggetti che non formano parte di noi stessi, ma in ogni caso il fatto che noi apprendiamo è la mutua azione fra i corpi. È questa mutua azione appunto che ci siamo adoperati di descrivere in questo trattato. Secondo i differenti aspetti viene essa chiamata Forza, Azione e Reazione, e Sforzo (§ 55), e la sua manifestazione sta nel cambiamento di moto dei corpi fra i quali agisce.

Il processo pel quale lo sforzo produce una doppia ed inversa variazione nel moto vien chiamato *lavoro*, e, come già dimostrammo altrove, il lavoro può considerarsi siccome un trasporto di energia da un corpo o da un sistema ad un altro.

Pertanto, come dicemmo, non abbiamo altra conoscenza della materia, fuor questa, che ad essa può venir comunicata dell'energia da altra materia, nel mentre che essa toglie altrettanto di energia a quest'altra materia.

E d'altra parte l'energia la conosciamo soltanto come quella che, in tutti i fenomeni naturali, si trasmette di continuo da una porzione di materia ad un'altra.

108. *Prova di una sostanza materiale.* — L'energia esiste soltanto in connessione colla materia. Ora, poichè nello spazio interposto fra sole e terra le irradiazioni luminose e termiche, che lasciarono il sole e non ancora raggiunsero la terra, possiedono un'energia, la cui grandezza può essere misurata in miglia cubiche; così questa energia deve appartenere alla materia esistente negli spazii interplanetari. E siccome

---

(1) Però devesi avvertire che, a motivo della forza centrifuga, mantenuta dallo stesso moto rotatorio della terra, la apparente deviazione oraria del piano d'oscillazione del pendolo, calcolata secondo la latitudine del luogo, risulta alcun po' differente dalla deviazione oraria risultante dall'esperienza, cioè or minore ed ora maggiore, secondo che la direzione iniziale del detto piano, riferita alla superficie del suolo, corrisponde piuttosto al piano meridiano, oppure al piano parallelo della verticale di sospensione, siccome verificarono primamente Dufour e Wartmann a Ginevra. Ma questo fatto riesce appunto in tal senso ed in tal misura da confermare esso pure il verso e la grandezza della rotazione terrestre.

G. C.

solo mediante la luce, che a noi arriva, siamo fatti avvertiti della esistenza delle stelle le più remote, così dobbiamo concludere che la materia la quale trasmette la luce, sia disseminata per tutto l'universo visibile.

109. *L'energia non è suscettibile di identificazione.* — Non torna possibile l'identificare una particolare porzione di energia, o seguirne le traccie attraverso le sue trasformazioni. Essa non ha alcuna esistenza individuale, quale è quella che attribuiamo ad una porzione particolare di materia.

Le transazioni dell'universo materiale sembrano farsi, per così dire, mediante un sistema di credito. Ogni transazione consta della traslazione di altrettanto credito od energia da un corpo all'altro; e un tal atto di traslazione o pagamento chiamasi lavoro. L'energia così trasferita non ritiene un carattere qualsiasi pel quale possa venir identificata, quando essa passa da una ad altra forma.

110. *La valutazione assoluta dell'energia di un corpo è ignota.* — L'energia di un sistema materiale può valutarsi soltanto in modo relativo.

In primo luogo, sebbene l'energia di movimento delle parti relative al centro di massa del sistema possa essere accuratamente definita, l'energia totale consiste in questa, unitamente all'energia di una massa eguale a quella di tutto il sistema moventesi colla velocità del centro di massa. Ora quest'ultima velocità — quella del centro di massa — può valutarsi soltanto riferendola a qualche corpo esterno al sistema, e il valore che noi assegniamo a questa velocità sarà differente a seconda del corpo che scegliamo per origine.

Pertanto, l'energia cinetica di un sistema materiale contiene una parte, la cui valutazione non può venir determinata, se non mediante la scelta arbitraria di un'origine. L'unica origine che non sarebbe arbitraria è il centro di massa dell'universo materiale. Or questo è un punto, la cui posizione ed il cui moto ci sono affatto ignoti.

111. *Energia latente.* — Ma l'energia di un sistema materiale è indeterminata anche per un'altra ragione. Noi non possiamo ridurre un sistema ad uno stato in cui non abbia energia, e non può esistere energia all'infuori d'un sistema, e soltanto la possiamo riconoscere quando un dato sistema presenti un incremento od un decremento nella grandezza della propria energia.

Dobbiamo pertanto riguardare l'energia di un sistema materiale come una quantità, della quale possiamo precisare l'aumento o la diminuzione, quando il sistema passa da una condizione definita ad un'altra. Il valore assoluto dell'energia nella condizione tipo ci è sconosciuto, e sarebbe di nessun momento per noi quand'anche lo cono-

scessimo, poichè tutti i fenomeni dipendono dalle variazioni dell'energia e non dal loro valore assoluto.

112. *Una completa discussione dell'energia includerebbe tutta la scienza fisica.* — La discussione delle varie forme di energia — gravifica, elettro-magnetica, molecolare, termica, chimica, ecc. — colle condizioni di conversione dell' energia dall' una forma all' altra, e del disperdimento dell'energia applicata a produrre lavoro, costituisce la somma della scienza fisica. Ed essa venne svolgendosi in diversi capitoli della Dinamica generale, i quali presero nome di Astronomia, Elettricità, Magnetismo, Ottica, Teoria degli stati fisici dei corpi, Termodinamica e Chimica.

CAPITOLO VII.

Il pendolo e la gravità.

113. *Del moto uniforme in un circolo.* — Sia M (fig. 11) un corpo che si muove in un circolo colla velocità V.

Sia $\overline{OM} = r$ il raggio del circolo.

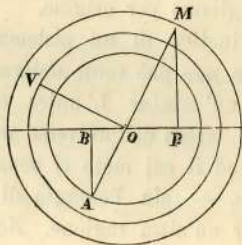



Fig. 11.

La direzione della velocità di M è quella della tangente al circolo Si conduca pel centro del circolo $\overline{OV}$ parallela a questa direzione ed eguale alla distanza descritta nell'unità di tempo colla velocità V, quindi $\overline{OV} = V$.

Se prendiamo O come origine del diagramma di velocità, V rappresenterà la velocità del corpo in M.

Siccome il corpo muovesi attorno al circolo, il punto V descriverà pure un circolo, e la velocità di esso starà a quella di M come $\overline{OV}$ ad $\overline{OM}$.

Se pertanto conduciamo $\overline{OA}$ sul prolungamento di $\overline{MO}$ e quindi parallela alla direzione del movimento di V, e facciamo $\overline{OA}$ terza proporzionale fra OM ed OV, e se assumiamo O come origine del diagramma della misura di accelerazione, il punto A rappresenterà allora la velocità del punto V, ovvero, ciò che torna lo stesso, la misura di accelerazione del punto M.

Pertanto quando un corpo si muove in un circolo con velocità uniforme, la sua accelerazione è diretta verso il centro del circolo, ed essa è una terza proporzionale fra il raggio del circolo e la velocità del corpo.

La forza che agisce sul corpo M è eguale al prodotto di questa accelerazione per la massa del corpo, ovvero, se indichiamo con F questa forza, avremo:

$$F = \frac{MV^2}{2}.$$

114. *Forza centrifuga.* — È questa la forza che deve agire sul corpo M, per tenerlo nel circolo di raggio r, in cui esso si muove colla velocità V.

La direzione di questa forza è verso il centro del circolo.

Se questa forza viene applicata mediante una fune legata al corpo, la fune si troverà in uno stato di tensione. A una persona che tenesse l'altro capo della fune, questa tensione sembrerebbe diretta verso il corpo M, come se questo avesse una tendenza a scostarsi dal centro del circolo che descrive.

Perciò quest'ultima forza è spesso chiamata *forza centrifuga.*

La forza che realmente agisce sul corpo, essendo diretta verso il centro del circolo, è detta *forza centripeta*, e in qualche trattato popolare le forze centripete e centrifughe vengono indicate siccome forze contrarie ed equilibrantisi. Esse però non sono che i due differenti aspetti d'un medesimo sforzo.

115. *Tempo periodico.* — Il tempo necessario a descrivere la circonferenza del circolo dicesi *tempo periodico.* Se π rappresenta il rapporto della circonferenza di un circolo al suo diametro, il quale è approssimativamente 3,14159..., la circonferenza di un circolo di raggio r sarà $2\pi r$, e poichè essa viene descritta nel tempo periodico T colla velocità V, avremo

$$2\pi r = VT,$$

quindi

$$F = 4\pi^2 M \frac{r}{T^2}.$$

La grandezza del moto circolare vien di sovente espressa dal numero di rivoluzioni nella unità di tempo. Indicando questo numero con n, sarà

$$n\,T = 1,$$

ed

$$F = 4\,\pi^2 M\,r\,n^2.$$

116. *Vibrazioni armoniche semplici.* — Se, mentre il corpo M (fig. 11) si muove in un circolo con velocità uniforme, un altro punto P si muove in un diametro fisso del circolo, per modo da trovarsi sempre al piede della perpendicolare calata da M su questo diametro, il corpo P dicesi eseguire vibrazioni armoniche semplici.

Il raggio r del circolo chiamasi l'*ampiezza* della vibrazione.

Il tempo periodico di M vien detto il *tempo periodico* di vibrazione.

L'angolo che OM fa colla direzione positiva del diametro fisso dicesi la *fase* della vibrazione.

117. *Forza che agisce su un corpo vibrante.* — L'unica differenza fra i moti di M e di P si è che M ha un movimento verticale composto con un movimento orizzontale, che è lo stesso di quello di P. La velocità quindi e l'accelerazione dei due corpi differisce unicamente rispetto alla parte verticale della velocità ed accelerazione di M.

L'accelerazione di P è perciò la componente orizzontale di quella di M, e poichè l'accelerazione di M è rappresentata da OA, che è nella direzione di OM prolungata, l'accelerazione di P sarà rappresentata da OB, ove B è il piede della perpendicolare calata da A sul diametro orizzontale. Dai triangoli simili OMP, OAB si ha ora:

$$OM : OA :: OP : OB,$$

ma

$$OM = r \quad \text{ed}\; OA = -\,5\pi^2\,\frac{r^2}{T^2},$$

quindi

$$OB = -\,\frac{4\,\pi^2}{T^2}\,OP = -\,4\pi^2\,n^2\,OP.$$

Nella vibrazione armonica semplice, pertanto, l'accelerazione è sempre diretta verso il centro di vibrazione, ed è eguale alla distanza da questo centro moltiplicata per $4\,\pi^2\,n^2$. E se la massa del corpo vibrante è P, la forza che agisce su di esso ad una distanza x da O sarà $4\,\pi^2\,n^2\,Px$.

Appare quindi come un corpo, che eseguisce vibrazioni armoniche semplici in una linea retta, è sollecitato da una forza la quale varia

come la distanza dal centro di vibrazione, ed il valore di questa forza, ad una data distanza, dipende soltanto da questa distanza, dalla massa del corpo, e dal quadrato del numero delle vibrazioni nell'unità di tempo, ed è indipendente dall'ampiezza delle vibrazioni.

118. *Vibrazioni isocrone.* — Ne consegue che ove un corpo si muova in linea retta e sia sollecitato da una forza diretta verso un punto fisso sulla linea e variabile come la distanza da questo punto, esso eseguirà vibrazioni armoniche semplici, delle quali il tempo periodico sarà lo stesso, qualunque sia l'ampiezza di vibrazione.

Se, per una specie particolare di spostamento di un corpo, come nel caso di rotazione attorno ad un asse, la forza che tende a riportarlo ad una data posizione varia come lo spostamento, il corpo eseguirà delle vibrazioni armoniche semplici attorno a quella posizione, ed il tempo periodico di queste sarà indipendente dalla loro ampiezza.

Le vibrazioni di questa specie, eseguite nello stesso tempo, qualunque siasi la loro ampiezza, vengono dette vibrazioni isocrone.

119. *Energia potenziale di un corpo vibrante.* — La velocità del corpo quando passa pel punto di equilibrio è eguale a quella del corpo che si muove nel circolo, cioè $V = 2\pi r n$, ove r è l'ampiezza di vibrazione ed n il numero delle doppie vibrazioni per secondo.

L'energia cinetica quindi del corpo vibrante nel punto di equilibrio sarà

$$\frac{1}{2}MV^2 = 2\pi^2 M r^2 n^2,$$

dove M è la massa del corpo.

All'estremo allontanamento, ove $x = y$, la velocità, e perciò l'energia cinetica del corpo, sarà zero. La diminuzione di energia cinetica deve corrispondere ad un incremento eguale di energia potenziale. Quindi se noi calcoliamo l'energia potenziale dalla configurazione in cui trovasi il corpo nel suo punto di equilibrio, la sua energia potenziale quando si trova ad una distanza r è $2\pi^2 M n^2 r^2$.

E questa è l'energia potenziale di un corpo che vibra isocronamente, ed eseguisce n doppie vibrazioni per secondo, quando si trova in riposo alla distanza r dal punto di equilibrio. Siccome l'energia potenziale non dipende dal movimento del corpo, ma soltanto dalla sua posizione, possiamo scrivere

$$2\pi^2 M n^2 x^2,$$

ove x denota la distanza dal punto d'equilibrio.

120. *Pendolo semplice.* — Il pendolo semplice consiste in una pic-

cola pallina pesante, sospesa ad un punto fisso mediante un sottile filo di lunghezza invariabile. Tale pallina si suppone così piccola che il suo moto possa considerarsi siccome quello di una particella materiale, e il filo così sottile che se ne possa trascurare la massa ed il peso. La pallina vien posta in movimento per modo da oscillare con piccolissimo angolo in un piano verticale. Il suo percorso, pertanto, è un arco di circolo, il di cui centro è il punto di sospensione O, ed il cui raggio è la lunghezza del filo, che indicheremo con l.

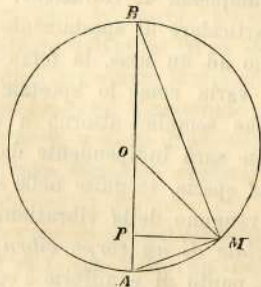



Fig. 12.

Sia O (fig. 12) il punto di sospensione, ed OA la posizione del pendolo quando è verticalmente sospeso. Allorquando la pallina è in M, essa è più in alto che quando sta in A dell'altezza $AP = \frac{AM^2}{AB}$, ove AM è la corda dell'arco AM, ed $AB = 2l$.

Se M è la massa della pallina e g la intensità della gravità, il peso del pendolo sarà Mg, ed il lavoro fatto contro la gravità durante il movimento del pendolo da A ad M sarà $Mg\overline{AP}$. Questa, pertanto, è la energia potenziale del pendolo quando la pallina è in M, calcolando l'energia come zero quando essa trovasi in A.

Possiamo scrivere questa energia

$$\frac{Mg}{2l} AM^2.$$

L'energia potenziale della pallina quando è spostata per un arco qualsiasi varia in ragione del quadrato della corda dell'arco.

Se essa ha variato come il quadrato dell'arco stesso in cui si muove, le vibrazioni sarebbero state strettamente isocrone. Siccome l'energia potenziale varia più lentamente che il quadrato dell'arco, il periodo di ciascuna vibrazione sarà tanto maggiore quanto maggiore ne è l'ampiezza.

Per vibrazioni assai piccole possiamo trascurare, del resto, la diffe-

renza fra la corda e l'arco, ed indicando l'arco con x potremo scrivere l'energia potenziale

$$\frac{Mg}{2\,l}x^2.$$

Ma dimostrammo poc'anzi che nelle vibrazioni armoniche l'energia potenziale è $2\,\pi^2\,M\,n^2\,x^2$.

Eguagliando queste due espressioni, e togliendo le frazioni, troviamo

$$g = 4\,\pi^2\,n^2\,l,$$

ove g è l'accelerazione di gravità, π il rapporto della circonferenza di un circolo al suo diametro, n il numero di vibrazioni del pendolo nell'unità di tempo, ed l la lunghezza del pendolo.

121. *Pendolo rigido.* — Se potessimo costrurre un pendolo con una pallina così piccola ed una funicella così sottile da potersi risguardare in pratica come un pendolo semplice, tornerebbe facile il determinare g con questo metodo. Ma qualsiasi pendolo reale è fornito di palla di notevole dimensione, e perchè resti invariabile la lunghezza del filo occorre connettere la palla col punto di sospensione mediante una verga robusta, la cui massa non può trascurarsi. È però sempre possibile il determinare la lunghezza di un pendolo semplice, le cui oscillazioni si compiano in egual tempo di quelle d'un pendolo di qualsivoglia foggia.

La discussione completa di questo soggetto ci trarrebbe a calcoli eccedenti i confini di questo trattato. Possiamo però arrivare al risultato più importante senza calcolo alcuno nel modo seguente:

Il moto di un corpo rigido in un piano può essere completamente definito, determinando il moto del suo centro di massa, e quello del corpo attorno a siffatto centro.

La forza che si richiede a produrre una data variazione nel moto del centro di massa dipende soltanto dalla massa del corpo (§ 63).

Ed il momento necessario a produrre una data variazione di velocità angolare attorno al centro di massa dipende dalla distribuzione delle masse; essendo tanto maggiore quanto più le differenti parti del corpo sono distanti dal loro centro di massa.

Se, pertanto, noi formiamo un sistema di due particelle, connesse rigidamente, e per modo: che la somma delle masse sia eguale alla massa di un pendolo, che il loro centro di massa coincida con quello del pendolo, e che le loro distanze dal centro di massa siano tali da richiedere una coppia d'egual momento per produrre un dato moto di rotazione attorno al centro del nuovo sistema come attorno a quello del pendolo, inallora il nuovo sistema per dei moti in un piano rie-

scirà dinamicamente equivalente al pendolo dato. Vale a dire, se i due sistemi vengono mossi nella medesima maniera, le forze richieste a regolare il loro moto saranno eguali.

Ora, poichè le masse delle due particelle ponno avere un rapporto qualsivoglia, purchè la somma delle masse sia eguale alla massa del pendolo; e poichè la linea che li congiunge può avere una direzione qualsiasi, purchè passi pel centro di massa: così potremo disporle per modo che una delle particelle corrisponda a un dato punto qualsiasi del pendolo, ossia al punto di sospensione P (fig. 13); e con ciò la massa di questa particella, e la posizione e massa dell'altra in Q resteranno pur determinate.

Fig. 13.

La posizione della seconda particella Q dicesi il *centro di oscillazione.* Ora, nel sistema di due particelle, se una di esse P è fissa, e l'altra Q può oscillare sotto l'azione della gravità, noi avremo un pendolo semplice.

Infatti una delle particelle P agisce come il punto di sospensione, e l'altra Q si trova ad una distanza invariabile da esso, cosicchè la connessione fra di esse sia la medesima, come se fossero unite da un filo di lunghezza $l = \overline{PQ}$.

Quindi un pendolo di forma qualsivoglia oscilla esattamente nello stesso modo di un pendolo semplice, la cui lunghezza sia la distanza del centro di sospensione dal centro di oscillazione.

122. *Inversione del pendolo.* — Suppongasi ora invertito il sistema delle due particelle, sicchè Q divenga il punto di sospensione e P venga invece fatto oscillare. Avremo allora un pendolo semplice della medesima lunghezza di prima.

Le sue vibrazioni verranno quindi compite nel medesimo tempo. Il che è dinamicamente eguale al pendolo sospeso mediante il suo centro di oscillazione.

Laonde un pendolo invertito, cioè sospeso pel suo centro di oscillazione, farà vibrazioni aventi la stessa durata di prima, e la distanza fra il centro di sospensione e quello di oscillazione sarà eguale a quello di un pendolo semplice ad esso isocrono.

In tal modo appunto il capitano Kater determinò la lunghezza del pendolo semplice che vibra a secondi.

Costrusse un pendolo così fatto, che poteva oscillare attorno il filo di due coltelli, situati dalle due bande del centro di massa ed a di-

stanze *diseguali* da questa. Mediante particolari disposizioni egli rese le durate delle vibrazioni eguali, sia che il tagliente dell'uno o dell'altro dei due coltelli operasse come asse di sospensione. Allora la lunghezza del pendolo semplice, isocrono con quello, era determinata col misurare la distanza tra i fili dei due coltelli.

123. *Illustrazione del pendolo di Kater.* — Il principio del pendolo di Kater può illustrarsi con un esperimento assai semplice e convincente. Prendasi una tavola piana di qualsiasi forma e la si attraversi con una sottile verghetta metallica in prossimità di un suo estremo (fig. 14), e si faccia in modo che resti sospesa in un piano verticale,

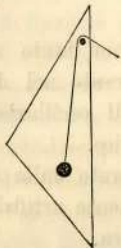



Fig. 14.

tenendo in mano la verghetta a guisa di asse orizzontale. Si prenda una pallina, la si leghi all'estremità di un filo, il quale dall'altro capo si fa scorrere sulla verghetta, per modo che la pallina resti liberamente sospesa al suo filo ed insieme aderente alla tavola. Si smuova la mano che tiene l'asse metallico orizzontale sì che palla e tavola dondolino attorno ad esso, e si osservi se la tavola oscilli più rapida o più lenta della pallina; nel primo caso si accorci il filo che regge la palla, nel secondo lo si allunghi, finchè pallina e tavola muovansi d'accordo. Si segni allora il punto della tavola opposto al centro della palla, e si fissi il filo che la regge all'asse di rotazione. In tal condizione si può muovere l'asse in qualsiasi modo, anche rapido ed irregolare, che la pallina non lascerà il punto segnato sulla tavola.

Questo segno è chiamato il centro di oscillazione, poichè quando la tavola oscilla attorno l'asse reso fisso, essa oscilla sempre come se consistesse di una semplice particella posta in questo punto.

124. *Determinazione dell'intensità della gravità.* — Il metodo più diretto per determinare g sarebbe certamente questo: di lasciar cadere un corpo e trovare quale velocità abbia guadagnato in un secondo. Ma riesce assai difficile il fare osservazioni accurate del movimento dei corpi quando le loro velocità sono talmente grandi da raggiungere i centim. 981 (§ 47) per minuto secondo. Inoltre l'esperimento dovrebbe

farsi per entro un vaso da cui fosse stata aspirata l'aria, giacchè la resistenza sua in un movimento sì rapido è rilevantissima, se la si paragona col peso del corpo che cade.

L'esperienza col pendolo è assai più soddisfacente. Rendendo assai piccolo l'arco di oscillazione, il movimento della pallina diventa così lento che la resistenza dell'aria non può avere che una debolissima influenza sulla sua durata. Nei migliori esperimenti il pendolo oscilla in un vaso da cui venne aspirata l'aria.

Oltre a ciò, il moto si ripete, e il pendolo oscilla dall'una parte all'altra centinaja o migliaja di volte, prima che le varie resistenze a cui è esposto riducano l'ampiezza delle oscillazioni così da renderle inapprezzabili.

Quest'osservazione consiste non tanto nel considerare il principio e la fine di una oscillazione, quanto nel determinare la durata di una serie di parecchie centinaja di oscillazioni, e dedurne quindi la durata di una oscillazione semplice.

L'osservatore vien poi esonerato dalla fatica di contare l'intero numero di oscillazioni col seguente artifizio, suscettibile della massima accuratezza nella scienza pratica.

125. *Metodo di osservazione.* — Il pendolo di un orologio è posto dietro il pendolo di prova, per modo che quando entrambi i pendoli trovansi sospesi verticalmente, la pallina o qualche altra parte del pendolo di prova celi affatto una traccia bianca segnata sull'altro, osservandola con un cannocchiale posto a qualche distanza.

L'orologio dev'essere preventivamente regolato a tempo medio solare, cosicchè il suo pendolo compia esattamente una vibrazione semplice in un minuto secondo di tempo medio.

Si fa quindi oscillare il pendolo di prova, e si osservano i due pendoli attraverso il cannocchiale. Supponiamo che la durata di una singola oscillazione non sia esattamente quella del pendolo regolatore, ma sibbene un poco più lunga.

L'osservatore, posto al cannocchiale, vede il pendolo orologio guadagnar sempre sul pendolo di prova, sino a che questo copre appuntino la traccia bianca dell'altro, quando passa per la verticale. Si nota l'istante in cui ciò avviene, e lo si tiene a calcolo come prima *coincidenza positiva.*

Il pendolo orologio continua a guadagnare sull'altro, e dopo un certo tempo i due pendoli attraversano la linea verticale nel medesimo istante, ma in direzione opposta. Si nota questo istante siccome prima *coincidenza negativa.* Dopo un eguale intervallo di tempo vi sarà una seconda coincidenza positiva, e così di seguito.

Con questo metodo l'orologio medesimo conta il numero N di vibrazioni del proprio pendolo, che intercedono fra le singole coincidenze. Durante questo tempo il pendolo di prova ha compito un'oscillazione di meno che l'orologio. Il tempo quindi di oscillazione del pendolo di prova è $\frac{N}{N-1}$ minuti secondi.

Quando non si riscontra coincidenza esatta, ma il pendolo orologio si trova all'innanzi del pendolo di prova ad un passaggio della verticale, ed indietro nel successivo, una lieve pratica per parte dell'osservatore lo abiliterà a calcolare a qual istante, fra i due passaggi, i due pendoli devono essersi trovati nella istessa fase. L'istante della coincidenza può così valutarsi ad una frazione di un secondo.

126. *Valutazione dell'errore.* — Il pendolo di prova potrà continuare ad oscillare per alcune ore, cosicchè l'intera durata da misurarsi può essere di diecimila e più oscillazioni.

Talchè l'errore introdotto nel calcolare la durata d'una oscillazione, per uno sbaglio di notazione anche di un intero secondo, può rendersi eccessivamente piccolo.

Se osserviamo, infatti, la prima e la ennesima coincidenza, e troviamo che esse sono separate da un intervallo di N secondi dell'orologio, il pendolo di prova avrà perduto n vibrazioni in confronto dell'orologio, ed avrà fatto $N - n$ oscillazioni in N secondi. Quindi la durata di una unica vibrazione sarà $T = \frac{N}{N-n}$ secondi.

Suppongasi, del resto, che si sbagli d'un secondo nel notare l'ultima coincidenza siccome avente luogo $N + 1$ secondi dopo la prima. La valutazione di T dedotta da questo risultato sarebbe

$$T' = \frac{N+1}{N+1-n},$$

e l'errore introdotto per lo sbaglio di un secondo si riduce a

$$T' - T = \frac{N+1}{N+1-n} - \frac{N}{N-n} = \frac{n}{(N+1-n)\,(N-n)}.$$

Se N è 10000 ed n è 100 un errore di un secondo nell'annotare l'istante di coincidenza altererebbe il valore di T unicamente di circa una milionesima parte del suo valore.

CAPITOLO VIII.

Gravitazione universale.

127. *Metodo di Newton.* — L'esempio più istruttivo del metodo razionale dinamico è quello pel quale Newton determinò le leggi della forza con cui i corpi celesti agiscono l'uno sull'altro.

Il processo del ragionamento dinamico consiste nel dedurre dalle figure successive dei corpi celesti, quali esse vennero osservate dagli astronomi, le loro velocità ed accelerazioni, e per tal modo determinare la direzione e la grandezza relativa della forza che agisce su di essi.

Keplero aveva di già preparata la via per l'investigazione di Newton, col dedurre da uno studio accurato delle osservazioni di Ticone Brahe le tre leggi del moto planetario, che da lui si intitolano.

128. *Leggi di Keplero.* — Le leggi di Keplero sono puramente cinematiche. Esse descrivono completamente i movimenti dei pianeti, ma nulla dicono circa le forze per cui questi movimenti sono determinati.

La loro interpretazione dinamica era riservata a Newton.

La prima e la seconda legge riferisconsi al movimento di un singolo pianeta.

Legge I. — Le aree descritte dal vettore condotto dal sole ad un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. Se h denota il doppio dell'area descritta nell'unità di tempo, il doppio di quella descritta nel tempo t sarà ht, e se P è la massa del pianeta, sarà Pht l'area-massa, come la si definì addietro (§ 68).

Laonde il momento angolare del pianeta attorno il sole, che è la misura della variazione dell'area-massa, sarà Ph, quantità costante.

Quindi la forza che agisce sul pianeta deve avere nessun momento rispetto al sole (§ 70), perchè, se così fosse, ne verrebbe aumentato o diminuito il momento angolare in proporzione del valore di un tal momento.

Pertanto, qualunque sia la forza che agisce sul pianeta, la direzione di questa forza deve sempre passare attraverso il sole.

129. *Velocità angolare.* — La velocità angolare di un vettore è la misura nella quale aumenta l'angolo che esso fa con un vettore fisso nel piano del suo movimento.

Se w è la velocità angolare di un vettore, ed r la sua lunghezza, la misura nella quale esso determina un'area è $\frac{1}{2} w r^2$. Quindi

$$h = w r^2,$$

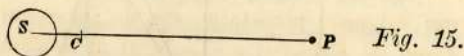
e dappoichè h è costante, la velocità angolare del movimento di un pianeta attorno al sole varia inversamente al quadrato della distanza da questo.

Ciò sarà vero qualunque possa essere la legge della forza, purchè la forza agente sul pianeta passi pel sole.

130. *Movimento attorno al centro di massa.* — Dappoichè lo sforzo fra il pianeta ed il sole agisce su entrambi i corpi, nessuno di essi può rimanere in quiete. L'unico punto che non sia affetto dallo sforzo è il comune centro di massa dei due corpi.

Se r è la distanza SP (fig. 15), e C è il centro di massa, sarà

$$\overline{SC} = \frac{P r}{S + P}, \quad e \quad \overline{CP} = \frac{S r}{S + P}.$$

S C P *Fig. 15.*

Ed il momento angolare di P attorno C è

$$P w \frac{S^2 r^2}{(S + P)^2} = \frac{P S^3 h}{(S + P)^2}.$$

131. *Orbita.* — Già facemmo uso dei diagrammi di figure e di velocità nello studiare il movimento di un sistema materiale. Questi diagrammi, del resto, rappresentano soltanto lo stato del sistema ad un dato istante; e questo stato è indicato dalla posizione relativa di punti corrispondenti ai corpi che formano il sistema.

Torna spesso conveniente, per altro, di rappresentare in un solo diagramma tutta la serie di figure e di velocità che assume il sistema. Se supponiamo che i punti del diagramma si muovano continuamente sì da rappresentare lo stato del sistema moventesi, ciascun punto del diagramma traccierà una linea, o retta o curva.

Sul diagramma di figura questa linea vien chiamata la *trajettoria* del corpo. Nel caso dei corpi celesti si suol denominare *orbita.*

132. *L'odografo.* — Nel diagramma di velocità la linea tracciata da ciascun punto che si muove dicesi l'*odografo* del corpo a cui corrisponde.

Lo studio dell'odografo, quale metodo di investigare il movimento

di un corpo, venne introdotto da W. A. Hamilton. L'odografo può definirsi siccome il cammino tracciato dall'estremità di un vettore che rappresenta continuamente, in direzione e grandezza, la velocità di un corpo in moto.

Applicando il metodo dell'odografo ad un pianeta, la di cui orbita sia in un piano, troveremo opportuno di supporre l'odografo ruotante attorno alla sua origine ad angolo retto, per modo che il vettore dell'odografo sia perpendicolare anzichè parallelo alla velocità che esso rappresenta.

133. *Seconda legge di Keplero.* — L'orbita di un pianeta rispetto al sole è un elissi, di cui il centro del sole tiene uno dei fuochi.

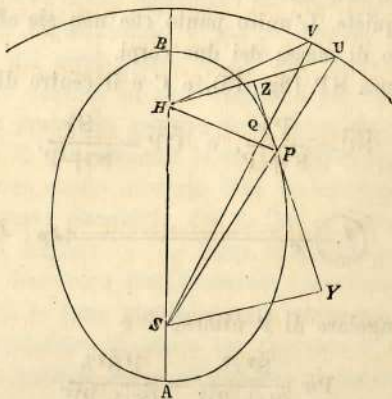



Fig. 16.

Sia A P Q B (fig. 16) l'orbita elittica. Sia S il sole in un fuoco ed H l'altro fuoco. Prolungata S P in U, cosicchè S U sia eguale all'asse trasversale A B, e congiunto H U, sarà H U proporzionale e perpendicolare alla velocità in P.

Divisa infatti per metà H U in Z, e congiunto Z con P, sarà Z P tangente in P all'elisse; sia S Y la perpendicolare a questa tangente.

Se v è la velocità in P, ed h il doppio dell'area descritta nell'unità di tempo sarà $h = v . \overline{SY}$.

Del pari, se b è la metà dell'asse conjugato dell'elisse, s'avrà

$$\overline{SY} . \overline{HZ} = b^2,$$

ma

$$HU = 2 HZ,$$

e perciò

$$v = \frac{1}{2} \frac{h}{b^2} \overline{HU}.$$

Quindi $\overline{HU}$ è sempre proporzionale alla velocità, e perpendicolare alla sua direzione. Ma SU essendo eguale ad AB, ne consegue che il circolo, il di cui centro è S ed AB il raggio, sarà l'odografo del pianeta, posto H l'origine dell'odografo.

I punti corrispondenti dell'orbita e dell'odografo sono quelli che giacciono sulla medesima retta passante per S.

Così P corrisponde ad U e Q a V.

La velocità comunicata al corpo durante il suo passaggio da P a Q è rappresentata dalla differenza geometrica fra i vettori HU ed HV, vale a dire dalla linea UV, ed è perpendicolare a quest'arco del circolo, come già dimostrammo, e diretta verso S.

Se PQ è l'arco descritto nell'unità di tempo, UV rappresenta l'accelerazione, e poichè UV è un arco di circolo il di cui centro è S, sarà UV la misura della velocità angolare del pianeta attorno ad S. Quindi l'accelerazione è proporzionale alla velocità angolare, e questa (giusta il § 129) è inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP. L'accelerazione quindi del pianeta è nella direzione del sole, ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza del sole.

Questa pertanto è la legge conformemente alla quale varia l'attrazione del sole su di un pianeta secondochè questo, muovendosi nella sua orbita, modifica la propria distanza dal sole.

134. *Forza su di un pianeta.* — Dappoichè, siccome già abbiamo dimostrato, l'orbita d'un pianeta rispetto al comun centro di massa del sole e del pianeta ha le proprie dimensioni nella ragione di S ed $S+P$ a quelle dell'orbita del pianeta rispetto al sole, se $2a$ e $2b$ sono gli assi dell'orbita del pianeta rispetto al sole, l'area è $\pi a b$, e se T è la durata del percorso completo lunghesso l'orbita, il valore di h è $2\pi \frac{a b}{T}$.

La velocità rispetto al sole è quindi

$$\pi \frac{a}{T b} \overline{HU};$$

e rispetto al centro di massa

$$\frac{S}{S+P} \frac{\pi a}{T b} \overline{HU}.$$

L'accelerazione del pianeta verso il centro di massa è

$$\frac{S}{S+P} \frac{\pi a}{T b} UV,$$

e l'impulso sul pianeta la di cui massa è P, sarà pertanto

$$\frac{S \, . \, P}{S + P} \frac{\pi a}{T b} UV.$$

Sia t il tempo impiegato a descrivere PQ; il doppio dell'area SPQ sarà allora

$$h t = w r^2 t$$

ed

$$UV = 2 a w t = 2 a \frac{h}{r^2} t = 4 \pi \frac{a^2 b}{T r^2} t,$$

e quindi la forza sul pianeta

$$F = 4 \pi^2 \frac{S \, . \, P}{S + P} \cdot \frac{a^3}{T^2 r^2}.$$

Questo pertanto è il valore dello sforzo od attrazione fra un pianeta ed il sole espresso nei termini delle loro masse P ed S, della loro distanza media a, della distanza attuale r e del tempo periodico T.

135. *Interpretazione della terza legge di Keplero.* — Per confrontare l'attrazione fra il sole e i differenti pianeti, Newton si servì della terza legge di Keplero.

Legge III. — I quadrati dei tempi periodici di differenti pianeti sono proporzionali ai cubi delle loro distanze medie.

In altre parole $\frac{a^3}{T^2}$ è una costante, cioè è $\frac{C}{4 \pi^2}$, e quindi

$$F = C \frac{S \, . \, P}{S + P} \frac{1}{r^2}.$$

Nel caso dei minori pianeti le loro masse sono così piccole, almeno paragonate a quella del sole, che $\frac{S}{S + P}$ può ritenersi eguale ad 1, cosicchè $F = C P \frac{1}{r^2}$; cioè l'attrazione su di un pianeta è direttamente proporzionale alla sua massa ed inversamente al quadrato della sua distanza.

136. *Legge di gravitazione.* — È questo il fatto più rimarchevole dell'attrazione di gravitazione, che essa cioè agisce egualmente su masse eguali di sostanze di qualsivoglia specie. E ciò venne confermato dalle esperienze col pendolo per differenti specie di sostanze alla superficie terrestre. Newton estese la legge anche alla materia di cui sono composti i differenti pianeti.

Erasi intraveduto, prima che Newton lo dimostrasse, che il sole come un tutto attrae, del pari come un tutto, un pianeta, e la legge dell'inversa dei quadrati era per tal modo precedentemente stabilita; ma nelle mani di Newton la dottrina della gravitazione assunse la sua forma finale.

Ogni porzione di materia attrae ogni altra porzione materiale, e lo sforzo fra di esse è proporzionale al prodotto delle loro masse, diviso pel quadrato delle loro distanze.

Infatti, se l'attrazione fra un gramma di materia nel sole, e un gramma di materia in un pianeta alla distanza r è $\frac{C}{r^2}$, ove C è una costante; se vi sono S grammi nel sole e P grammi nel pianeta, l'intera attrazione fra il sole ed un gramma nel pianeta sarà $\frac{CS}{r^2}$, e quindi l'intera attrazione fra il sole ed il pianeta sarà $C\frac{SP}{r^2}$.

Confrontando questo enunciato della legge di Newton sulla gravitazione universale col valore di F, primamente ottenuto, troviamo

$$C\frac{SP}{r^2} = 4\pi^2 \frac{S.P}{S+P} \frac{a^3}{T^2 r^2},$$

ossia

$$4\pi^2 a^3 = C(S+P) T^2.$$

137. *Trasformazione della terza legge di Keplero.* — La terza legge di Keplero può quindi essere così modificata:

I cubi delle distanze medie stanno come i quadrati dei tempi periodici, moltiplicati per la somma delle masse del sole e del pianeta.

Nel caso dei pianeti maggiori, Giove, Saturno, ecc., il valore di S+P è considerabilmente più grande che non nel caso della terra e dei pianeti minori. I tempi periodici quindi dei pianeti maggiori dovrebbero essere di qualche cosa minori che non secondo la legge di Keplero, e tale appunto si trovò essere il caso.

Nella tavola seguente le distanze medie a dei pianeti sono espresse mediante la distanza media della terra, ed il tempo periodico T mediante l'anno siderale.

Appare da questa tavola che la terza legge di Keplero è assai prossimamente accurata, perchè a^3 si approssima assai a T^2; ma per quei pianeti la di cui massa è minore di quella della terra — cioè Mercurio, Venere e Marte — a^3 è minore di T^2, mentre per Giove, Saturno, Urano e Nettuno, la di cui massa è maggiore di quella della terra a^3, è maggiore di T^2.

PIANETA	a	T	a^3	T²	$a^3 - T_2$
Mercurio	0,387098	0,24084	0,0580046	0,0580049	— 0,0000003
Venere	0,72333	0,61518	0,378451	0,378453	— 0,0000002
Terra	1,0000	1,00000	1,00000	1.00000	
Marte	1,52369	1,88082	3,53746	3,53747	— 0,00001
Giove	5,20278	11,8618	140,832	140,701	+ 0,131
Saturno	9,53879	29,4560	867,914	867,658	+ 0,256
Urano	19,1824	84,0123	7058,44	7058,07	+ 0,37
Nettuno	30,037	164,616	27100,0	27098,4	+ 1,6

138. *Energia potenziale dovuta alla gravitazione.* — L'energia potenziale di gravitazione fra i corpi S e P può calcolarsi quando si conosca l'attrazione fra di essi, espressa mediante le loro distanze. Il processo di calcolo col quale riassumiamo gli effetti di una quantità continuamente variabile, appartiene al Calcolo integrale, e sebbene in questo caso il nostro calcolo possa venire spiegato coi metodi elementari, dedurremo piuttosto l'energia potenziale direttamente dalla prima e seconda legge di Keplero.

Queste leggi definiscono completamente il moto del sole e del pianeta, e quindi possiamo trovare l'energia cinetica del sistema corrispondente ad una parte qualsiasi dell'orbita elittica. Ora, poichè il sole ed il pianeta formano un sistema conservativo (§ 72), la somma dell'energia cinetica e della potenziale dev' essere costante. E pertanto, quando si conosca l'energia cinetica, possiamo dedurre quella parte di energia potenziale che dipende dalla distanza fra i corpi.

139. *Energia cinetica del sistema.* — Per determinare l'energia cinetica osserviamo che la velocità del pianeta rispetto al sole è (§ 133)

$$v = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}\overline{\mathrm{H\,U}}.$$

Le velocità del pianeta e del sole rispetto al centro di massa del sistema sono rispettivamente

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}+\mathrm{P}}v, \text{ e } \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}+\mathrm{P}}v.$$

Le energie cinetiche del pianeta e del sole sono quindi

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{\mathrm{S}^2 v^2}{(\mathrm{S}+\mathrm{P})^2}, \text{ e } \frac{1}{2}\mathrm{S}\frac{\mathrm{P}^2}{(\mathrm{S}+\mathrm{P})^2}v^2$$

e l'energia cinetica totale è

$$\frac{1}{2}\frac{S\,.\,P}{S+P}v^2=\frac{1}{4}\frac{S\,.\,P}{S+P}\frac{h^2}{b^4}\overline{HU}^2.$$

A determinare v^2 mediante $\overline{SP}$ od r, osservisi che per la legge delle aree

$$v\,.\,SY=h=\frac{2\pi a b}{T}\;\ldots\ldots\;(1)$$

rd anche per una proprietà dell' elisse

$$\overline{HZ}\,.\,\overline{SY}=b^2\;\ldots\ldots\;(2),$$

e pei triangoli simili HZP ed SPY

$$\frac{SY}{HZ}=\frac{HP}{SP}=\frac{r}{2a-r}\;\ldots\ldots\;(3).$$

Ora moltiplicando le (2) e (3) si trova

$$\overline{SY}^2=\frac{b^2 r}{2a-r}.$$

E quindi dalla (1)

$$v^2=\frac{4\pi^2\,.\,a^2b^2}{T^2}\,\frac{1}{SY^2}=\frac{\lambda\pi^2a^2}{T^2}\left(\frac{2a}{r}-1\right),$$

e l'energia cinetica del sistema è

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\,\frac{S\,.\,P}{S+P}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right);$$

e questa per l'equazione ultima del paragrafo 136, diventa

$$C\,.\,S\,.\,P\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right);$$

ove C è la costante di gravitazione.

Questo è il valore dell'energia cinetica dei due corpi S e P, quando muovonsi in un'elissi di cui l'asse trasversale è $2\,a$.

140. *Energia potenziale del sistema.* — La somma delle energie cinetiche e potenziali è costante, ma il suo valore assoluto (§ 110) non lo si conosce, nè occorre conoscerlo.

Quindi se noi supponiamo che l'energia potenziale sia della forma

$$K-C\,.\,S\,.\,P\frac{1}{r}$$

il secondo termine, l'unico che dipenda dalla distanza r, è pertanto

il solo che si debba considerare. L'altro termine K rappresenta il lavoro fatto dalla gravitazione quando i due corpi, in origine, a una distanza infinita tra di loro, si avvicinassero di tanto, quanto lo permettono le loro dimensioni.

141. *La luna è un corpo pesante.* — Avendo così determinato la legge della forza fra ciascun pianeta ed il sole, Newton procedette a mostrare come il peso dei corpi osservato alla superficie terrestre e la forza che ritiene la luna nell'orbita attorno alla terra, stanno fra loro secondo la stessa legge dei quadrati inversi della distanza.

Questa forza di gravità agisce in ogni regione a noi accessibile, sulla vetta delle più alte montagne e sui punti più elevati che siensi raggiunti dagli aerostati. La sua intensità, misurata colle esperienze del pendolo, decresce man mano ci eleviamo; e sebbene l'altezza che possiamo raggiungere è così piccola, in confronto del raggio terrestre, che non ci è possibile l'inferire da osservazioni di questo genere, che la gravità varia inversamente al quadrato della distanza dal centro della terra, il decrescimento osservato della intensità della gravità è consono a questa legge, la di cui forma od espressione venne suggerita a Newton dal moto dei pianeti.

Ritenendo quindi che l'intensità della gravità varii in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro della terra, e conoscendone il valore alla superficie terrestre, Newton calcolò il suo valore alla distanza media della luna.

I suoi primi calcoli andarono errati, per aver egli adottato una valutazione erronea delle dimensioni della terra. Quando per altro egli ebbe ottenuto un valore più corretto di questa quantità, trovò che il valore della gravità, calcolato per una distanza eguale a quella della luna, era eguale alla forza richiesta per tenere la luna entro la propria orbita. Egli identificò di tal modo la forza che agisce fra la terra e la luna, con quella che determina i corpi vicini alla superficie terrestre a cadere verso il centro della terra.

142. *Esperienze di Cavendish.* — Avendo così mostrato che la forza con cui i corpi celesti si attraggono l'un l'altro è della stessa natura di quella per cui i corpi che possiamo maneggiare sono attratti verso la terra, rimaneva ancora a mostrarsi che i corpi terrestri si attraggono l'un l'altro.

La difficoltà nasceva dal fatto che la massa dei corpi che noi possiamo maneggiare è così piccola paragonata con quella della terra, che anche quando portiamo i due corpi vicini quanto possiamo, l'attrazione fra di essi è una frazione eccessivamente piccola del peso di ciascuno. Non possiamo sottrarci all'attrazione della terra, ma possiamo di-

sporre l'esperienza in tale una guisa, che la influenza di quella non modifichi l'effetto della reciproca attrazione dei due corpi.

L'apparecchio ideato da Giovanni Mitchell a questo intento è quello che ebbe di poi il nome di *bilancia di torsione*. Mitchell morì prima d'essere in grado di fare l'esperimento, ma il suo apparecchio venne nelle mani di Enrico Cavendish, che lo migliorò sotto parecchi riguardi, e misurò l'attrazione fra grosse palle pesanti ed altre piccole sospese ai bracci della bilancia. Un istrumento simile venne in seguito inventato indipendentemente da Coulomb allo scopo di misurare le forze elettriche e magnetiche, e continua ad essere il miglior istrumento conosciuto nella scienza per la misura di piccole forze d'ogni specie.

143. *Bilancia di torsione.* — La bilancia di torsione consiste in una verga orizzontale, sospesa mediante un filo ad un sostegno fisso. Quando la verga si fa ruotare a mezzo di una forza esterna in un piano orizzontale, essa torce il filo, che, essendo elastico, tende a resistere a questo sforzo ed a distorcersi. La forza di torsione è proporzionale all'angolo pel quale il filo viene torto, cosicchè se si obbliga la forza ad agire in direzione orizzontale perpendicolarmente alla verga, ad una sua estremità si potrà, osservando l'angolo sotto il quale la forza può far girare la verga, determinare la grandezza della forza.

La forza è proporzionale all'angolo di torsione e alla potenza quarta del diametro del filo, e inversamente alla lunghezza della verga e del filo.

Facendo uso pertanto di un filo lungo e sottile e di una verga lunga, si potranno misurare forze piccolissime.

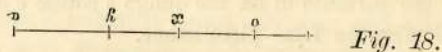
Fig. 17.

Nell'esperienza di Cavendish due sfere di egual massa vengono sospese alle estremità della verga della bilancia di torsione. Trascuriamo pel momento la massa della verga in confronto di quella delle sfere.

Due sfere più grosse di egual massa M sono disposte in guisa che ponno essere collocate sia in M ed M, sia in M′ ed M′. Nella prima posizione esse tenderanno per la loro attrazione sulle sfere più piccole m ed n a far ruotare la verga della bilancia nella direzione delle freccie; nell'ultima tenderanno invece a farla ruotare in verso contrario. La bilancia di torsione colle sfere ad essa sospese vien racchiusa in una custodia, affine di impedire che abbia ad essere disturbata dalle correnti d'aria. La posizione della verga della bilancia viene determinata mediante osservazioni su di una scala graduata, veduta per riflessione in uno specchio verticale fissato a metà della verga. La bilancia vien posta in un'apposita camera, e l'osservatore non deve entrarvi, ma osservare l'immagine della scala graduata col mezzo di un cannocchiale.

144. *Processo dell'esperienza.* — Anzitutto devesi allora determinare il tempo T di una doppia oscillazione della bilancia di torsione, ed avere la posizione di riposo dei centri delle sferette sospese, quando cioè il filo che regge la leva orizzontale non offre torsione che valga a farla ruotare.

Di poi le sfere grandi vengono portate nelle loro posizioni MM, per modo che il centro di ciascheduna sia alla medesima distanza dalla posizione di riposo dei centri delle sferette, e disposto l'uno dall'un lato, l'altro dall'altro dell'asta.

Fig. 18.

L'esperienza non è attendibile fino a che le vibrazioni dell'asta non siano cessate; ma però vengono osservate le divisioni della scala corrispondenti alle estremità di una vibrazione semplice, e se ne trovano le distanze x ed y rispettive dalla posizione di equilibrio. In questi punti la verga, per un istante, è in riposo, per modo che la sua energia è intieramente potenziale: e poichè l'energia totale è costante, l'energia potenziale corrispondente alla posizione x deve essere eguale a quella corrispondente alla posizione y.

Ora se T è la durata di una doppia vibrazione attorno il punto di equilibrio O, l'energia potenziale dovuta alla torsione quando leggiamo x sulla scala è (§ 119)

$$\frac{2\,\pi^2\, m}{T^2}\, x^2,$$

e quella dovuta alla gravitazione fra m ed M è (§ 140)

$$K - C\,\frac{m\,M}{a - x}.$$

L'energia potenziale di tutto il sistema nella posizione x è quindi

$$K - C \frac{mM}{a-x} + \frac{2\pi^2 m}{T^2} x^2.$$

Nella posizione y è

$$K - C \frac{mM}{a-y} + \frac{2\pi^2 m}{T^2} y^2;$$

e poichè in queste due posizioni l'energia potenziale è eguale, sarà

$$CmM\left(\frac{1}{a-y} - \frac{1}{a-x}\right) = \frac{2\pi^2 m}{T^2}\left(y^2 - x^2\right),$$

quindi

$$C = \frac{2\pi^2}{MT^2}\left(x+y\right)\left(a-x\right)\left(a-y\right).$$

In questa equazione la costante C della gravità è espressa mediante quantità osservate, cioè M massa in grammi delle sfere grosse, T durata in secondi di una doppia vibrazione, ed x, y ed a distanze in centimetri.

Giusta le esperienze di Baily $C = 6,\ 5 \times 10^{-8}$. Se assumiamo l'unità di massa per modo che alla unità di distanza produca una unità di accelerazione, prendendo ad unità il centimetro e il minuto secondo, l'unità di massa sarebbe di circa 1.537×10^7 grammi, cioè 15,37 tonnellate.

Questa unità di massa riduce all'unità la costante C della gravità, e come tale può impiegarsi nei calcoli dell'astronomia fisica.

145. *Gravitazione universale.* — Abbiamo così riscontrata l'attrazione di gravitazione attraverso una grande varietà di fenomeni naturali, ed abbiamo trovato che la legge stabilita per la variazione della forza a differenti istanti fra un pianeta ed il sole sussiste pure, quando ci facciamo a paragonare l'attrazione fra i diversi pianeti ed il sole, ovvero fra la luna e la terra, con quella fra la terra ed i corpi che trovansi alla sua superficie.

Di tal modo trovammo che la gravitazione di masse eguali, a distanze eguali, è la stessa, qualunque sia la natura della materia onde il corpo consta.

E ciò venne accertato dagli esperimenti del pendolo con diverse sostanze, e ben anche dal confronto dell'attrazione del sole sui diversi pianeti, che probabilmente non hanno la medesima composizione. Le esperienze di Baily su sfere di differenti sostanze applicate alla bilancia di torsione confermano pure questa legge.

Dappoichè quindi noi troviamo in sì gran numero di casi, che si verificano in luoghi remoti l'un dall'altro, che la forza di gravitazione dipende unicamente dalla massa dei corpi, e non dalla loro natura chimica o dal loro stato fisico, ci troviamo guidati a conchiudere che essa è vera per tutte le sostanze.

Così, per esempio, non v'ha persona scientifica che dubiti che due particelle di aria atmosferica non si attraggano l'una l'altra, quantunque siavi poco a sperare possano mai rinvenirsi dei metodi esperimentali così delicati da misurare od anche solo rendere manifesta siffatta attrazione.

Sappiamo però che l'attrazione si manifesta fra una particella qualsiasi di aria e la terra, e mediante l'esperienza di Cavendish troviamo che i corpi pesanti, aventi una massa sufficiente, gravitano sensibilmente l'un verso l'altro, e ne conchiudiamo che due particelle di aria devono comportarsi nell'istesso modo.

Ma resta sempre estremamente dubbio se il mezzo della luce e della elettricità è una sostanza ponderale, quantunque sia di certo materiale ed abbia una massa.

146. *Causa della gravitazione.* — Newton nei suoi *Principia* deduce, dai movimenti osservati dei corpi celesti, che essi attraggonsi l'un l'altro secondo una legge definita.

E questo egli ce lo dà siccome il risultato di un ragionamento strettamente dinamico, e per esso mostra come non soltanto i fenomeni più cospicui, ma ben anco tutte le apparenti irregolarità dei movimenti di questi corpi sono i risultati calcolabili di questo solo principio. Nei suoi *Principia* egli si limita alla dimostrazione ed allo sviluppo di questo gran passo nella scienza della mutua azione dei corpi. Nulla però ci dice intorno ai mezzi pei quali i corpi vengono fatti gravitare l'un verso l'altro. Sappiamo che la sua mente non si arrestò su questo punto, sebbene egli sentisse come la gravitazione stessa sia un fenomeno, il quale può diventare suscettibile di spiegazione, ed anzi egli ne suggerì una, dipendente dall'azione di un mezzo etereo che invade lo spazio. Ma con quella saggia moderazione, caratteristica di tutte le sue investigazioni, egli sceverò tali speculazioni da ciò che aveva stabilito mediante l'osservazione e la dimostrazione, ed escluse dai suoi *Principia* ogni accenno alla causa di gravitazione, riserbandosi a questo proposito i suoi pensieri per le *Quistioni* stampate in fine della sua *Ottica*.

I tentativi fattisi da Newton in poi per risolvere questa difficile quistione sono pochi, e non guidarono finora ad un risultato bene stabilito.

147. *Applicazione del metodo di investigazione di Newton.* — Il

metodo di investigare le forze che agiscono fra i corpi, intraveduto ed applicato da Newton pel caso dei corpi celesti, venne di poi felicemente proseguito nel caso dei corpi elettrizzati e magnetici da Cavendish, Coulomb e Poisson.

L'investigazione del modo con cui le minute particelle dei corpi agiscono l'una sull'altra, è resa più difficile pel fatto che entrambi i corpi che si considerano, e le loro distanze sono così piccole che non si ponno scorgere nè misurare, e perciò non siamo in grado di osservarne i movimenti, come lo possiamo pei pianeti, o pei corpi elettrizzati o magnetizzati.

148. *Metodo delle investigazioni molecolari.* — Le investigazioni pertanto della scienza molecolare procedettero, per la massima parte, col metodo delle ipotesi, e col confronto di risultati dell'ipotesi coi fatti osservati.

L'esito delle indagini fatte con questo metodo dipende dalla generalità dell'ipotesi assunta. Se la nostra ipotesi è estremamente generale, come quella che i fenomeni investigati dipendano solo dalla figura e dal movimento di un sistema materiale, ci troveremo allora in grado di dedurre qualche utile risultato da una tale ipotesi, e potremo in tutta sicurezza applicarla ai fenomeni indagati.

Se, all'incontro, formiamo tale ipotesi che la figura, il movimento o l'azione del sistema materiale siano di una definita specie, quantunque i risultati di essa concordino coi fenomeni, potremo sempre dubitare che la nostra ipotesi sia erronea, a meno che ci fosse dato provare che nessun'altra ipotesi può render conto dei fenomeni stessi.

149. *Importanza delle proprietà generali ed elementari.* — È quindi della massima importanza in tutte le ricerche fisiche il conoscere a fondo le proprietà più generali dei sistemi materiali. Ed è per siffatto motivo che in questo libro volli piuttosto trattenermi sulle proprietà generali, anzichè entrare nel campo più variato ed interessante delle proprietà speciali delle particolari forme di materia.

APPENDICE

ESTRATTI DALLE LEZIONI DEL MOSSOTTI

Movimento composto. [1]

1. Quando il corpo è animato contemporaneamente da due o più forze, od anche da una sola forza e da una velocità preconcepita nella stessa od in differente direzione di quella della forza, il movimento si dice *composto.*

Per determinare i luoghi che occupa successivamente un corpo animato contemporaneamente da due o più velocità, o da forze che operano in direzioni costantemente parallele, si fa uso di una legge che si chiama la legge del movimento composto, e si esprime così: « se distinti movimenti sono impressi ad un tempo, o successivamente, ad un corpo, questi si compongono in modo che il corpo si trova in ciascun istante nello stesso luogo dello spazio, nel quale si troverebbe in virtù della combinazione di questi movimenti, se esistessero ciascuno realmente, e separatamente nel corpo. »

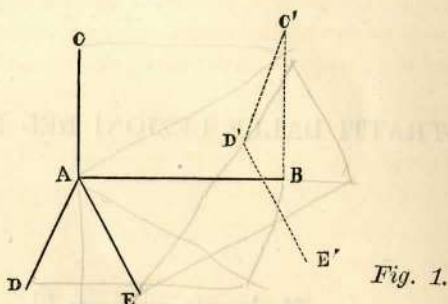
Secondo questa legge non si ha che a considerare ciascun movimento a parte, determinare il luogo nel quale il corpo si troverebbe, se i movimenti si effettuassero uno dopo l'altro, nella loro propria direzione, ed il luogo così determinato sarà realmente quello nel quale deve trovarsi il corpo per l'effetto simultaneo di quei movimenti.

Nella fig. 1, il punto A dinota il luogo del corpo animato da quattro movimenti, che separatamente possono traslocare in un dato tempo il

---

(1) *Lezioni elementari di fisica matematica* del prof. O. F. Mossotti. Corfù, 1841, vol. I, pag. 26, Lezione II.

corpo per gli spazii rappresentati in grandezza ed in direzione dalle rette AB, AC, AD, AE. Il luogo del corpo, animato simultaneamente da tutti questi movimenti alla fine del tempo dato, sarà E', che risulta conducendo BC', C'D', D'E', rispettivamente uguali e parallele ad AC, AD, AE.

Fig. 1.

Infatti, pel solo movimento secondo AB il corpo dovrebbe trovarsi dopo il tempo dato in B: ma essendo contemporaneamente anche animato dal movimento nella direzione parallela ad AC, il corpo verrà trasportato in questa direzione per uno spazio BC', uguale ad AC; dunque esso si troverà per la riunione dei due movimenti in C'. Considerisi ora anche il movimento parallelo ad AD: questo movimento avrà, durante lo stesso tempo, trasportato il corpo per uno spazio C'D' uguale e parallelo ad AD, per cui il corpo invece di essere in C' si troverà in D'. Proseguendo così questo ragionamento, si vede che esso ci conduce a trovare pel luogo del corpo lo stesso punto E' determinato secondo la costruzione data sopra.

La legge della composizione dei movimenti fu messa in campo la prima volta dal Galilei (1), e conduce al principio generale, che una forza motrice imprime ad ogni istante la stessa quantità di movimento ad un corpo, sia esso in quiete od in moto, in una direzione concorrente, opposta, od obliqua a quella della forza, e che i movimenti dalle forze generati ad ogni istante in un corpo si accoppiano coi già preesistenti, e si effettuano tutti indistintamente nelle loro proprie direzioni, senza alterarsi reciprocamente. La misura delle forze, data dalla relazione:

$$F = mf$$

dove f esprime l'accelerazione che la forza motrice F produce nell'unità di tempo nel corpo di massa m, suppone anch'essa implicitamente questo principio, perchè dovendosi intendere per forze doppie, triple, ecc., la

(1) Nella *Giornata quarta* dei suoi: *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed ai movimenti locali.* Arcetri 1638.

riunione di due, tre, ecc., forze uguali, ed avendo definito che le forze doppie, triple, ecc., sono quelle che generano una quantità doppia, tripla, ecc., di movimento, ciò suppone che ciascuna forza generi la stessa quantità di movimento, sia quando opera sola, sia quando opera in unione colle altre.

2. Consideriamo ora più particolarmente due soli movimenti uniformi, o due movimenti uniformemente accelerati, che animino il corpo A (fig. 2) uno nella direzione parallela ad AM, l'altro nella direzione parallela ad AN.

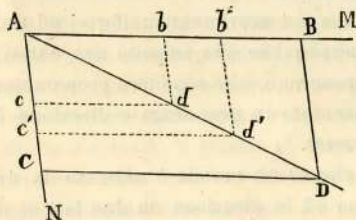



Fig. 2.

Siano AB ed AC gli spazi che il corpo può percorrere in tempi uguali in virtù di ciascuno di questi movimenti, dico che costrutto il parallelogrammo ABCD, per l'esistenza simultanea dei due movimenti, il corpo, oltre al trovarsi alla fine dello stesso tempo sulla estremità D della diagonale AD, avrà percorso questa stessa diagonale.

Prendiamo perciò sugli spazii AB ed AC tante parti A*b*, A*b'*, ecc., A*c*, A*b'*, ecc., che siano rispettivamente corse in tempi uguali dal mobile, quando fosse animato parzialmente dal solo movimento per AM, o dal solo movimento per AN. I movimenti essendo amendue uniformi od amendue uniformemente accelerati, le parti A*b*, A*b'*, ecc., A*c*, A*c'*, ecc., staranno rispettivamente tutte fra loro nella ragione di AB ad AC. Ora applicando a tutti questi spazii parziali la legge del moto composto di cui abbiamo fatto uso, il corpo dovrà trovarsi successivamente nei punti *d*, *d'*, ecc., che si ottengono costruendo i triangoli A*bd*, A*b'd'*, ecc., per mezzo delle *bd*, *b'd'*, ecc., parallele ad AC e rispettivamente uguali alle A*c*, A*c'*, ecc.; e tutti questi triangoli riuscendo simili per la proporzionalità dei due loro lati comprendenti un angolo uguale, i punti *d*, *d'*, ecc., si troveranno tutti sulla diagonale AD, che sarà la linea percorsa dal mobile (1).

(1) Questa dichiarazione del Mossotti può ridursi più semplice e non meno concludente, qualora, invece di compiere il parallelogrammo ABCD e di tracciar poi i parallelogrammi A*bdc*, A*b'd'c'*, la si limiti a costruire e considerar poi altrettanti triangoli. Cioè dall'estremo B della retta AB, rappresentatrice d'uno dei moti impressi al punto A, si guidi la BD, parallela ed eguale alla AC, che rappresenta l'altro moto impresso ad A: indi si tracci la retta congiungente A con D. Questa retta AD, che chiude un triangolo colle due AB e BD, sarà la rappresentatrice dell'unico moto com-

Così nel caso di due movimenti uniformi od uniformemente accelerati, pei quali il corpo percorrerebbe separatamente in un dato tempo i lati AB, AC, si avrà dalla loro riunione un movimento unico per la diagonale AD, uniforme od uniformemente accelerato, che li rappresenterà amendue. Viceversa un movimento uniforme od uniformemente accelerato unico per la diagonale AD potrà essere scomposto e considerato come il risultamento di due movimenti uniformi od uniformemente accelerati contemporanei secondo i lati AB, AC di un parallelogrammo qualunque costrutto sopra la AD come diagonale (1).

3. Quello che si dice dei movimenti uniformi od uniformemente accelerati è ugualmente applicabile alle velocità con cui si fanno, ed alle forze acceleratrici che li generano, che sono loro proporzionali, e che perciò possono essere rappresentate in grandezza e direzione dalle linee che rappresentano i movimenti.

Di qui ne segue che se un mobile è animato da due velocità, rappresentate in grandezza ed in direzione da due lati di un parallelogrammo, il movimento risultante sarà quello che verrà fatto con una velocità, rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale; e perciò questa velocità potrà essere sostituita a quelle due; viceversa, se il mobile è animato da una velocità sola, il suo movimento, potendosi considerare come risultante da due movimenti fatti colle due velocità rappresentate in gran-

---

posto di A, cioè risultante dai due contemporanei moti AB e BD. Infatti, guidando dai punti *b*, *b'*, ecc., delle parallele alla BD, ossia alla AC, per mezzo della somiglianza dei triangoli A*bd*, A*b'd'*, ecc., ABD, e ritenuto BD = AC, è facile mostrare che le rette *bd*, *b'd'*, ecc., essendo rispettivamente eguali alle A*c*, A*c'*, ecc., i punti *d*, *d'*, ecc., D saranno, in eguali tempi, mano mano raggiunti dal punto A per la composizione dei moti parziali A*b*, A*c*, A*b'*, A*c'*, ecc., AB, AC.

Con ciò si ha un enunciato più semplice e di più facile applicazione per la composizione dei movimenti.

Come il moto composto di due moti simultanei è dato in direzione e grandezza dalla retta che compie un triangolo colle due rette, guidate l'una di seguito all'altra e rispettivamente parallele ed eguali alle rette rappresentatrici dei due moti dati; del pari il moto composto o risultante d'un qualsivoglia numero di moti contemporanei, è rappresentato dalla retta che compie un poligono, congiungendo gli estremi liberi d'una spezzata, i cui singoli successivi tratti, o lati, sono rispettivamente paralleli ed eguali ai singoli moti proposti. Così credetti opportuno di fare nei miei *Elementi di fisica*. Milano, 1870.

G. C.

(1) Per quanto s'è detto nella nota precedente, risulta pure che: un lato di qualsiasi triangolo rappresenta sempre un moto composto di due movimenti simultanei, rappresentati dagli altri suoi due lati. E viceversa ad un moto rappresentato da una data retta, si potranno sempre sostituire due moti rappresentati da due altre rette, le quali, insieme colla data, compiano un triangolo. Ed anzi qualsiasi lato d'un poligono è sempre rappresentativo del moto composto dato dall'insieme dei moti rappresentati dagli altri suoi lati: e viceversa ad un unico moto espresso dall'un lato si possono sostituire altrettanti moti quanti sono gli altri lati d'un dato poligono.

G. C.

dezza e direzione dai lati di un parallelogrammo, costrutto sulla prima velocità come diagonale, si potrà risguardare il mobile come dotato di queste due velocità invece della prima.

Similmente, se un corpo è animato da due forze acceleratrici rappresentate in grandezza e direzione dai due lati di un parallelogrammo, il movimento risultante sarà quello che potrà essere generato da una forza acceleratrice unica rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale, e questa forza potrà rimpiazzare le due date. Viceversa il movimento prodotto da una forza acceleratrice data qualunque, potendo essere considerato come il risultato di due movimenti uniformemente accelerati, quali sarebbero prodotti da due forze acceleratrici rappresentate in grandezza ed in direzione dai lati di un parallelogrammo costrutto sulla retta rappresentante la forza acceleratrice data come diagonale, quelle due forze potranno essere sostituite a questa. Il passaggio dalla composizione dei movimenti alla composizione delle forze acceleratrici è diretto, e discende dalla connessione e proporzionalità che sussiste fra loro.

4. Se i movimenti per AM ed AN non fossero uniformi od uniformemente accelerati, od in generale se non fossero variabili secondo una medesima legge, ma fossero variati in un modo qualunque, o se la direzione di ciascuna delle forze che li riproducono non fosse costantemente parallela a sè stessa, o se l'una e l'altra di queste circostanze sussistessero assieme, allora bisogna dividere il tempo in istanti, e considerare per ogni istante le forze acceleratrici secondo l'attuale loro direzione e secondo le loro grandezze, e componendole nel modo ora indicato, daranno la forza acceleratrice unica, della quale si può considerare animato il mobile nello stesso istante. Dalla cognizione della forza acceleratrice e della sua direzione ad ogni istante, il calcolo integrale insegna a dedurre la velocità, lo spazio percorso, e le curve descritte dal mobile dopo un tempo qualunque.

Da quanto vien detto risulta dunque che in ogni istante a due forze rappresentate dai lati di un parallelogrammo si può sostituire una sola forza rappresentata dalla diagonale, o viceversa, e che gli effetti di quella coppia di forze, o della forza unica in quell'istante, saranno sempre uguali. Le forze, agenti secondo i lati, si chiamano le *componenti*, e la forza secondo la diagonale, la *risultante*, e la sostituzione che può farsi delle une alle altre, o viceversa, forma la celebre proposizione conosciuta sotto il nome del *principio* del *parallelogrammo delle forze* (1).

Il principio dell'inerzia della materia, in unione con quello della composizione dei movimenti esposti al numero 1; il principio sperimentale

(1) E che meglio direbbesi il *principio del poligono delle forze*. G. C.

dell'eguaglianza dell'azione e della reazione, e quello su cui è basata la misura delle forze, costituiscono i fondamenti di tutta la teorica del movimento, e sono conosciuti nella meccanica razionale sotto la denominazione generale delle *tre leggi del moto.*

Dell'equilibrio di un punto. [a]

1. Nella seconda lezione sulla teorica generale del movimento abbiamo esposto come i movimenti possano comporsi e scomporsi, cioè quale è il movimento che un corpo compie quando è animato da più movimenti alla volta, e viceversa come il movimento che un corpo eseguisce può essere considerato come l'effetto di più movimenti simultanei. Quando più forze agiscono contemporaneamente sopra un corpo, o su più corpi collegati insieme, e si trovano combinate in modo che i movimenti che esse tendono ad imprimere si distruggano vicendevolmente, allora si dice che il corpo, ed i corpi sono in *equilibrio*, e la scienza che considera le condizioni in cui l'equilibrio può sussistere dicesi *statica*. Questa scienza è specialmente utile per intendere l'effetto delle macchine, e per aprire il cammino alla determinazione delle circostanze che accompagnano il movimento di un sistema di corpi, e quindi forma uno dei rami più importanti per la fisica meccanica.

Per esporre le prime nozioni sui principii che regolano l'equilibrio di un corpo, considerato come un punto, è convenevole di rappresentare le forze con delle linee. Ora, una forza motrice applicata ad un corpo si misura col prodotto della massa del corpo per la velocità che esso acquisterebbe in virtù dell'azione che la forza spiega nell'istante, continuata in un modo costante ed uniforme nella unità di tempo. Ma quando più forze agiscono nello stesso istante sopra un medesimo corpo, la massa del corpo divenendo un fattor comune, le forze vengono ad essere soltanto proporzionali alle rispettive velocità che esse imprimerebbero nell'unità di tempo, ossia alle loro corrispondenti forze acceleratrici. Le linee proporzionali alle forze, applicate nelle direzioni di queste intorno al punto che tien luogo del corpo dovranno dunque essere considerate, nelle costruzioni che ci occorrerà di fare, come rappresentanti le forze acceleratrici colle quali le forze rispettive animerebbero il corpo.

2. Ciò posto, cominciamo a considerare l'equilibrio nel caso più semplice

---

(a) *Lezioni elementari*, ecc., di O. F. Mossotti. Tom. I, pag, 65, Lez. VI.

in cui le forze che operano sul punto sono soltanto due. In questo caso è evidente che il punto *M* (fig. 3) non può restare in equilibrio a meno

P M q *Fig.* 3.

che i movimenti per *Mp* ed *Mq* che esse imprimerebbero siano uguali ed opposti. Ma se i movimenti sono uguali, anche le forze che li generano debbono essere uguali; dunque bisogna che le forze siano uguali ed in direzione contraria.

Se le forze non sono uguali, nè direttamente opposte, l'equilibrio non può aver luogo. Già s'è visto che un corpo animato da due forze acceleratrici, rappresentate dai lati AB, AC di un parallelogrammo ABCD (fig. 4),

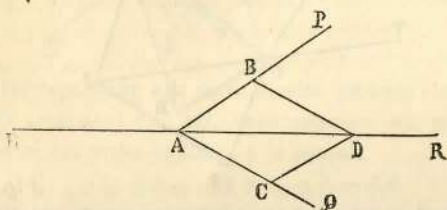



Fig. 4.

procederebbe con un movimento come che fosse animato da una forza acceleratrice unica, rappresentata dalla diagonale AD.

Il corpo non potrà dunque restare in equilibrio, a meno che nel prolungamento di AD non sia applicata una terza forza AE, capace di produrre un movimento quale sarebbe generato da una forza acceleratrice uguale e contraria a quella rappresentata da AD. Da questa considerazione ne segue dunque che, onde un punto rimanga in equilibrio sotto l'azione di tre forze, è necessario che la terza forza sia nel piano delle due prime, uguale in intensità, e contraria in direzione alla *risultante* di quelle, la quale è rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo, i di cui lati rappresentano in grandezza e direzione le due *componenti* (1).

3. Estendiamo ora il problema al caso generale, e consideriamo l'equilibrio di un numero qualunque di forze applicate ad uno stesso punto. Il processo che dobbiamo seguire per risolverlo è assai ovvio; basta cominciare a cercar la risultante delle due prime forze, poi comporre questa risultante colla terza forza, poi la risultante di questa colla quarta forza, e così successivamente per tutte le forze, eccetto l'ultima; e la

(1) Ancor qui può dirsi che un punto, sollecitato a muoversi da tre o più forze, starà in equilibrio, sempre quando le rette rappresentatrici, in direzione e grandezza, dei movimenti ad essi correlativi saranno tali, che ognuna di esse riesca eguale ed opposta alla retta che chiude un poligono cogli estremi della spezzata, i cui lati successivi siano paralleli ed eguali alle rette rappresentatrici di tutti gli altri movimenti.
G. C.

condizione dell'equilibrio sarà che l'ultima risultante sia uguale ed opposta alla forza rimasta. Eseguendo questa costruzione in un modo analogo a quello che abbiamo seguito nel numero della lezione seconda: si troverà che il punto resterà in equilibrio quando, partendo, da esso e costruendo un poligono i cui lati siano successivamente uguali e paralleli a ciascuna delle forze, e diretti nello stesso modo, questo poligono venga a chiudersi da sè stesso, cioè quando l'estremità del lato che corrisponde all'ultima forza venga a cadere nel punto di riunione di tutte le forze da cui siamo partiti. Siano, per esempio (fig. 5), OP, OQ,

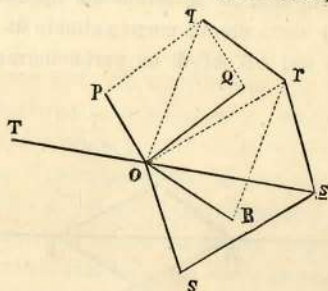



Fig. 5.

OR, OS, OT tante forze che agiscono sul punto O. Le forze OP, OQ daranno la risultante *oq*, questa colla R darà la risultante O*r*, e questa colla OS darà la O*s*, ed affinchè il punto rimanga in equilibrio, quest'ultima risultante dovrà essere uguale e contraria in direzione alla forza OT, con che verranno a distruggersi vicendevolmente.

Considerando poi i lati OP, P*q*, *qr*, *rs* del poligono OP*qrs*T, si vede che essi sono per costruzione rispettivamente uguali e paralleli alle forze OP, OQ, OR, OS e che l'ultimo lato, *o* risultante *s*O, che chiude il poligono, è per la condizione suddetta d'equilibrio uguale alla forza OT e nella direzione opposta a quella della stessa forza.

Si osservi che non è necessario che le forze OP, OQ, OR, OS, OT siano nello stesso piano, onde la detta condizione per l'equilibrio sia verificata.

4. Si chiama *projezione* di una retta sopra di un'altra la parte compresa su questa seconda retta dalle due perpendicolari, abbassate dalle estremità della prima retta sulla seconda. Nelle fig. 6 e 7 *cd* e *cd* rappresentano le

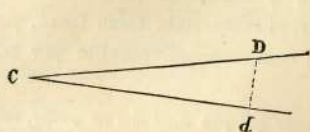
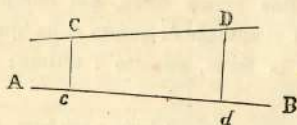
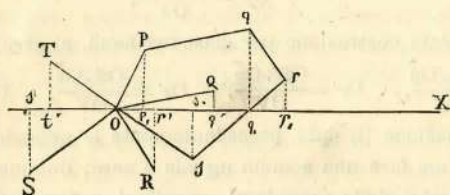



Fig. 6 e 7.

projezioni della retta CD sulla AB, ed è facile di dimostrare che le projezioni di rette uguali e parallele sopra una stessa retta sono tutte uguali fra loro.

Le rette rappresentanti un sistema di forze che si fanno equilibrio intorno ad un punto dovendo, per ciò che abbiamo dimostrato, essere tali, da poter formare il perimetro di un poligono chiuso, è evidente che la somma delle projezioni di tutte queste rette o lati, prese positivamente quando sono dirette secondo un verso, e negativamente quando lo sono nel verso opposto, sopra una retta tirata in una direzione qualunque, deve sempre, onde il poligono sia chiuso, essere uguale a zero. Così condotta una retta qualunque OX (fig. 8) le projezioni Op_1, p_1q_1, q_1r_1, delle rette op,

pq, qr, che corrispondono alle forze dirette secondo un verso, sono pareggiate dalle projezioni r_1s_1, s_1O, delle rette sr, sO, che corrispondono alle forze dirette nel verso opposto, e la somma

$$Op_1 + p_1q_1 + q_1r_1 - s_1r_1 - s_1 0$$

di tutte queste projezioni, procedenti nei due versi opposti, è nulla quando il poligono è chiuso.

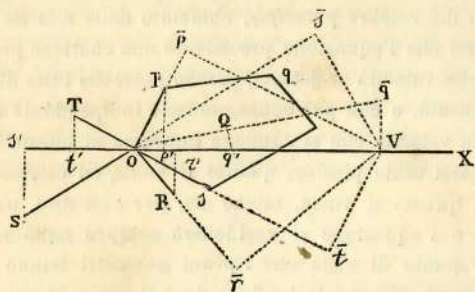
Ma per essere le projezioni di rette uguali e parallele sempre rispettivamente uguali fra loro, si ha (nella fig. 8):

$$p_1q_1 = Oq' \qquad q_1r_1 = Or' \qquad -r_1s_1 = Os' \qquad -s_1O = Ot'$$

la condizione precedente si riduce dunque a

$$(1) \qquad Op'_1 + Oq' + Or' + Os' + Ot' = 0$$

prendendo positive le projezioni delle forze dirette da O verso X, e negative quelle da X verso O, cioè verso la parte opposta.

Ciò posto, supponiamo di imprimere al punto O già in equilibrio una

velocità in una direzione qualunque capace di trasportarlo, per esempio, nell'unità di tempo da O in V (fig. 9). Se dalla estremità di una delle

forze, quella OP, per esempio, abbassiamo una perpendicolare sopra OV, e dalla estremità V una perpendicolare sulla direzione della forza OP, i due triangoli simili che ne risultano siccome rettangoli ed aventi l'angolo comune in O, danno la proporzione

$$\mathrm{OV} : \mathrm{OP} = \mathrm{O}\bar{p} : \mathrm{O}p'$$

dalle quali si ricava pel valore della projezione $\mathrm{O}p'$ della forza OP sulla retta OX l'espressione

$$\mathrm{O}p' = \frac{\mathrm{OP}\,.\,\mathrm{O}\bar{p}}{\mathrm{OV}},$$

ripetendo questa costruzione per ciascuna forza, si avrà:

$$\mathrm{O}q' = \frac{\mathrm{OQ}\,.\,\mathrm{O}\bar{q}}{\mathrm{OV}}, \quad \mathrm{O}r' = \frac{\mathrm{OR}\,.\,\mathrm{O}\bar{r}}{\mathrm{OV}}, \quad \mathrm{O}s' = \frac{\mathrm{OS}\,.\,\mathrm{O}\bar{s}}{\mathrm{OV}}, \quad \mathrm{O}t' = \frac{\mathrm{OT}\,.\,\mathrm{O}\bar{t}}{\mathrm{OV}}.$$

Ma per l'equazione (1) data precedentemente le projezioni $\mathrm{O}p'$, $\mathrm{O}q'$, $\mathrm{O}r'$, $\mathrm{O}s'$, $\mathrm{O}t'$, devono fare una somma uguale a zero; dunque, sommando tutti i secondi membri delle precedenti equazioni, e togliendo il divisore comune OV, si avrà:

$$(2) \qquad \mathrm{OP}\,.\,\mathrm{O}\bar{p} + \mathrm{OQ}\,.\,\mathrm{O}\bar{q} + \mathrm{OR}\,.\,\mathrm{O}\bar{r} + \mathrm{OS}\,.\,\mathrm{O}\bar{s} + \mathrm{OT}\,.\,\mathrm{O}\bar{t} = 0.$$

Questa equazione dice che: « se più forze sono in equilibrio intorno ad un punto, e si suppone di imprimere a questo punto una velocità in una direzione qualunque, la somma dei prodotti di ciascuna forza per la velocità projettata nella direzione della forza è una somma nulla, » intendendo che le velocità projettate debbano essere prese come negative quando cadono dal lato opposto della direzione della forza rispettiva.

Secondo una denominazione introdotta dal Galileo, il prodotto della forza per la velocità projettata chiamasi *momento,* ed il momento si considera come negativo quando le direzioni delle velocità projettate e delle forze corrispondenti sono opposte. Così la proposizione precedente si riduce a dire, che *la somma dei momenti, positivi e negativi, di tutte le forze agenti intorno ad un punto, deve essere nulla, se vi è equilibrio.* Questo è il caso più semplice del celebre *principio,* chiamato delle *velocità virtuali.*

È da notarsi che l'equazione precedente non contiene propriamente che i rapporti delle velocità projettate, perchè potrebbe tutta dividersi per una di queste velocità, e che per conseguenza è indipendente dalla grandezza assoluta della velocità che si suppone impressa al punto. Questa velocità potrà concepirsi tanto piccola, quanto si vuole, od esistere per un tempo tanto breve, quanto si vuole, talchè sia, per così dire, una velocità nel suo nascere, e l'equazione si verificherà sempre nello stesso modo. È sotto questo punto di vista che i primi geometri hanno considerata la velocità impressa, ciò che le ha fatto dare il nome di velocità *virtuale.*

Della equazione delle velocità virtuali e delle macchine semplici. (1)

1. L'equazione delle velocità virtuali, che abbiamo trovata rispetto all'equilibrio di più forze applicate ad un punto, si estende anche all'equilibrio di più forze applicate a punti differenti, che non abbiano la libertà di muoversi gli uni indipendentemente dagli altri, o, come si dice, applicate ad un sistema di punti.

Fu coll'esame delle condizioni di equilibrio delle macchine semplici, che Galileo, Descartes, ed in seguito altri, riconobbero che le relazioni fra le forze e le velocità projettate erano sempre rette da un sol principio in tutte le macchine, e questo principio, esteso poi da Giovanni Bernoulli ad un sistema qualunque, ha preso il nome di principio delle velocità virtuali, il più universale che si sia scoperto per tradurre in equazioni le condizioni dell'equilibrio di un sistema.

Come la dimostrazione diretta di un tal principio nel caso generale è un po' troppo astratta per chi comincia questi studî, seguiremo un cammino analogo a quello delle scoperte. Applicheremo cioè dapprima il principio alle macchine semplici, verificandone la giustezza per mezzo di dimostrazioni dedotte da altri principî, e poi esporremo alla fine una dimostrazione di esso pel caso generale di un sistema qualunque (2). Questo procedere avrà il vantaggio di fornirci l'occasione di far conoscere e spiegare alcuni dei principî più importanti che sono stati impiegati nella statica, e di darci nello stesso tempo una idea chiara dell'uso del principio delle velocità virtuali.

2. « Le macchine sono, in generale, dei congegni, che stabiliscono certi rapporti di grandezza e di direzione fra le velocità con cui possono muoversi i diversi punti ai quali sono applicate le forze » (3).

Nell'equilibrio delle macchine si considerano più comunemente soltanto due forze, una che si chiama la *potenza*, la quale è riguardata come quella che ha il potere di equivalere all'effetto, che si vuol distruggere, di una

---

(1) *Lezioni elementari*, ecc., di O. F. Mossotti, vol. I, pag. 70, Lezione VIII.

(2) Qui non riproduciamo questa dimostrazione, perchè essa, sebbene sia stesa con semplicità e chiarezza, e coi mezzi della matematica elementare, escirebbe di troppo dai limiti del presente libro. G. C.

(3) È notevole l'analogia di questa definizione di una macchina data dal Mossotti col concetto dell'ufficio d'ogni macchina, svolto dal Galilei, e da me accennato nel proemio. G. C.

altra forza opposta, la quale, viceversa, resistendo allo sforzo della prima, si dice la *resistenza*.

Volendo applicare il principio delle velocità virtuali alle macchine, bisogna immaginare impresso ai loro punti e quindi a quelli a cui sono applicate la potenza e la resistenza uno di quei movimenti, che Carnot ha chiamato *movimenti geometrici*.

Si intende per movimento geometrico tal movimento che un sistema di corpi possa eseguire, senza dar origine ad alcuna azione reciproca degli uni sugli altri, cioè senza impacciarsi reciprocamente, e nulladimeno senza separarsi. Se si concepisse che tutti i punti del sistema divenissero slegati, le velocità da cui essi dovrebbero essere animati, per soddisfare ad un movimento geometrico, sarebbero quelle con cui venissero a muoversi, conservando un semplice contatto fra loro, senza tendenza a compenetrazione od a soluzione di continuità.

Ciò posto, se si indica con P la potenza, con R la resistenza, e con p ed r i due termini che rappresentano il rapporto delle projezioni delle velocità nelle direzioni in cui rispettivamente si muoverebbero la potenza e la resistenza, imprimendo alla macchina un movimento geometrico, secondo il principio delle velocità virtuali, deve sussistere per ogni macchina l'equazione

$$Pp + Rr = 0$$

Da questa equazione si deduce

$$Pp = - Rr,$$

la quale ci dice che: *in ogni macchina, il momento della potenza deve sempre essere uguale e contrario al momento della resistenza* (1).

---

(1) Qui di seguito il Mossotti, con elegante semplicità, si fa a dichiarare le condizioni di equilibrio della leva, del verricello, della puleggia, delle taglie, del piano inclinato, del cuneo e della vite, sempre collo stesso metodo, cioè col determinare quali velocità debbano imprimersi ai due punti d'applicazione della potenza e della resistenza, affinchè la macchina abbia a soddisfare ad un movimento geometrico. E così feci anch'io nei succitati miei *Elementi di fisica* del 1870. G. C.

FINE.

INDICE

CAPITOLO PRIMO.

CAPITOLO II.

CAPITOLO III.

CAPITOLO IV.

CAPITOLO V.

CAPITOLO VI.

CAPITOLO VII.

CAPITOLO VIII.

APPENDICE.

ERRATA-CORRIGE.

Pagina	*Linea*	*Ove dice*	*Si ponga*
4	27	vetotre	vettore
6	3	un punto	un punto P
6	5	vettore O P	vettore O' P
11	ult.	$\overline{A_{,} B^2}$	$\overline{A_{,} B_{,}}$
13	nota	$P_{,} Q_{,} R.$	$P_{,} Q_{,} R_{,}$
14	25	di 980	di circa 981
ivi	27	980 centim.	981 centim.
22	3	terra non sono	terra sono
44	9	$+ T_2$	$+ T_B$
46	nota	diciamo altrove	diciamo nel proemio
57	35	diconsi *marea*	diconsi *maree*
65	13	$\frac{M V^2}{2}$	$\frac{M V^2}{r}$
66	28	$-5 \pi \frac{2 r^2}{T^2}$	$-4 \pi \frac{2 r}{T^2}$
68	20	$A M^2$	$\overline{A M^2}$
75	17	$P S^3 h$	$P S^2 h$

Pagina	*Linea*	*Ove dice*	*Si ponga*
11	23	$A_2 A_2$	$A_2 A_1$
16	22	$\overline{\omega}$	$\overline{\omega\alpha}$
ib.	26	$\omega\beta$	$\overline{\omega}\beta$
21	35	qualora si	si
73	ultima formula	$= \frac{n}{(N+1-n)(N-n)}$	$= - \frac{n}{(N+1-n)(N-n)}$
81	4	$r d$	$o d$
ib.	6ª formula	$\frac{\lambda \pi^2 a^2}{T^2}$	$\frac{4 \pi^2 a^2}{T^2}$
84	fig. 18.	sono capovolte le lettere.	